

TEOREMA DE BELL E SUAS CONSEQUÊNCIAS

José Roberto Pinheiro Mahon

Membro correspondente da Academia Paraense de Ciências
Professor do Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro

1 Introdução

Após a criação da mecânica quântica surgiram inconsistências que foram sintetizadas em 1935 no paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen, mais conhecido como **paradoxo EPR**. Em 1964 Bell colocou esse paradoxo em termos quantitativos o que permitiu a execução de experimentos que concluíram pela validade da mecânica quântica, dando plausibilidade ao conceito de **não localidade**.

Em 1935 Einstein, Podolski e Rosen utilizando de forma engenhosa os conceitos da mecânica quântica juntamente com proposições sobre localidade, realidade e de completude teórica (totalmente plausíveis) demonstraram que em certas ocasiões os estados quânticos, ou apresentam a propriedade de não localidade, ou não são descrições completas da realidade física.¹ Uma vez que a não localidade implica na possibilidade da transmissão de sinais com velocidade maior do que a da luz, preferiram se manter à conclusão da incompletude. Esse paradoxo será analisado com detalhe mais adiante.

Em 1964, Bell² analisou o paradoxo EPR sob a perspectiva dos trabalhos de Bohm³ e derivou uma desigualdade que abria a possibilidade de verificar experimentalmente as conclusões de EPR sobre incompletude. Esse trabalho é considerado como uma das descobertas seminais da física do século XX pois equaciona de maneira clara e precisa aspectos fundamentais da mecânica quântica que antes eram apenas objeto de divagações.

Mais tarde, em 2003, Leggett obtém desigualdades tipo Bell para “formas aceitáveis” de “realismo não local” e formula um **teorema de incompatibilidade** para discussão do problema.⁴

¹A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Physical Review*, **47**, 777 (1935).

²J. S. Bell, *Physics*, **1**, 195 (1964).

³D. Bohm, *Quantum theory*, (1951); D. Bohm, *Physical Review*, **85**, 166 (1952); *Ibidem*, 180 (1952).

⁴A. J. Leggett, *Foundations of Physics*, **33**, 1469-1493 (2003).

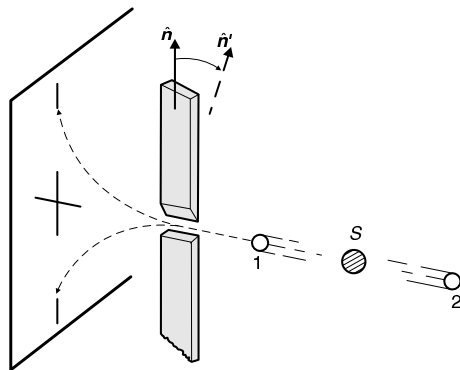
2 Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen

Apesar de proporcionar contribuições que foram fundamentais para o desenvolvimento da mecânica quântica convencional, Einstein sempre teve reservas a seu respeito. Em seus comentários um dos temas que lhe despertavam maiores preocupações era a incompletude da descrição teórica da mecânica quântica, provida pela função de onda ψ . Em consequência, afirmava que a teoria quântica, na forma em que se apresentava, estava limitada à mera discussão de resultados experimentais, e a percepção de que a essência da ciência é a predição e controle de fenômenos físicos e de que qualquer progresso em física irá se realizar através da manipulação de formalismos, ao invés do desenvolvimento da nossa concepção da realidade, foi se generalizando. As críticas de Einstein eram elaboradas cuidadosamente. Até os nossos dias muitas de suas críticas nunca foram respondidas satisfatoriamente.

A mais famosa dessas críticas está contida no paradoxo EPR. Eles analisaram um *Gedankenexperiment* em que uma partícula decai em duas, e, mediante argumentos de conservação de *momentum* e de energia, invocando o conceito de **colapso de onda**, concluem pela incompletude da função de onda que representa o estado quântico.

Bohm adaptou o argumento do paradoxo EPR a um par de partícula de *spin* $\frac{1}{2}$ que se encontram no estado $|\psi\rangle_j$. Nessa forma de apresentar o argumento, as variáveis de *spin* evidenciam de maneira clara as conclusões, além de facilitarem a dedução da **desigualdade de Bell** que veremos adiante.

Duas partículas de *spin* $\frac{1}{2}$ são produzidas por uma fonte S , por exemplo, o decaimento de uma molécula com *spin* total 1 e que decai em dois átomos de *spin* $\frac{1}{2}$ e se movem livremente em direções opostas conforme está esquematizado na figura abaixo, que é a medida Stern-Gerlach na versão de Bohm.



A função de onda do sistema é dada por

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2) \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2] \quad (1)$$

onde $\varphi_1(\vec{r}_1)$ e $\varphi_2(\vec{r}_2)$ são funções de pacote de onda que não se sobrepõem e $|\pm\rangle_1$ e $|\pm\rangle_2$ são autofunções do operador *spin* $S_{\hat{n}_1}$ e $S_{\hat{n}_2}$ na direção \hat{n} das partículas 1 e 2 respectivamente.

O estado descrito na relação (1) se refere ao sistema formado pelas partículas 1 e 2. Suponhamos que ao efetuar uma medida de *spin* na partícula 1, mediante um aparato Stern-Gerlach com o campo magnético na direção \hat{n} , obtemos o resultado de *spin up* (ao longo de \hat{n}). Neste caso, de acordo com a teoria quântica, a função de onda dada pela expressão (1) se reduz (colapso da função de onda) a:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow \varphi_1(\vec{r}_1)\varphi_2(\vec{r}_2)|+\rangle_1|-\rangle_2. \quad (2)$$

O resultado da medida é uma função de onda fatorizável o que nos permite concluir, sem que tenha havido perturbação da partícula 2, que o seu estado é $|-\rangle_2$. Esse resultado para o sistema 2 depende do tipo de medida efetuada no sistema 1. Se tivéssemos efetuado a medida do *spin* do sistema 1 ao longo da direção \hat{n}' , ver figura já apresentada, o estado (1) devido à simetria rotacional seria escrito como

$$\psi(\hat{r}_1, \hat{r}_2) = \varphi_1(\hat{r}_1)\varphi_2(\hat{r}_2)\frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle'_1|-\rangle'_2 - |-\rangle'_1|+\rangle'_2] \quad (3)$$

onde $|\pm\rangle'_1$ e $|\pm\rangle'_2$ são autofunções do operador de *spin* na direção \hat{n}' . Neste caso, se o resultado da medida da partícula 1 nessa nova direção \hat{n}' for *up*, então a função de onda total se reduz para

$$\psi(\hat{r}_1, \hat{r}_2) \rightarrow \varphi_1(\hat{r}_1)\varphi_2(\hat{r}_2)|+\rangle'_1|-\rangle'_2. \quad (4)$$

Neste caso devemos atribuir o estado $|-\rangle'_2$ para o átomo 2 que não foi medido. Efetuando diferentes medidas no átomo 1 estaremos obtendo estados diferentes para o átomo 2.

Feitas essas colocações e a fim de compreendermos o argumento EPR vamos definir as seguintes proposições:

1. **Correlação perfeita:** se os *spins* das partículas 1 e 2 são medidos ao longo de uma direção o resultado das medidas serão opostos;
2. **Localidade:** se no instante da medida os sistemas não mais interagem, não podem ocorrer mudanças em um dos sistemas em virtude da medida realizada no outro;
3. **Realidade:** se for possível prever com certeza o valor de uma grandeza física, sem perturbar o sistema, então existe um elemento de realidade física que corresponde a esta quantidade física;
4. **Completeza:** todo elemento de realidade física deve ter uma contrapartida na teoria que descreve o fenômeno.

Utilizando as quatro proposições, totalmente plausíveis, e em concordância com a lógica clássica, o argumento apresentado por EPR procede da seguinte maneira:

- Devido a proposição 1, podemos prever com certeza o resultado de medir qualquer componente do *spin* da partícula 2, escolhendo previamente a mesma componente de *spin* da partícula 1;
- Devido a proposição 2, a medida efetuada em 1 não pode provocar mudanças em 2;
- Devido a proposição 3, a componente do *spin* escolhida para 2 é um elemento de realidade física, o que é válido para qualquer direção escolhida, veja Eqs. (1) a (4), onde todas as componentes de *spin* são elementos de realidade física.

O paradoxo, segundo a mecânica quântica não existe um estado quântico de uma partícula de *spin* $\frac{1}{2}$ no qual todas as componentes de *spin* têm valores definidos. Devido a proposição 4, completeza, a mecânica quântica não é uma teoria completa, pelo menos, para o caso do sistema com *spin* total igual a zero formado por um par de partículas *spin* $\frac{1}{2}$. Para esse sistema existem elementos de realidade física para a qual a mecânica quântica não tem contrapartida. Assim sendo, a mecânica quântica é uma teoria incompleta e no artigo original, Einstein, Podolsky e Rosen mencionam que *acreditam que uma teoria quântica completa pode ser possível* com o que lançam o germe para o surgimento das diversas teorias de **variáveis ocultas**. Vale a pena mencionar que uma conclusão alternativa pode ser obtida renegando o conceito de localidade, proposição 2. Neste caso, mesmo que os dois subsistemas não estejam mais interagindo, a medição efetuada em um deles perturbaria instantaneamente o outro. A teoria quântica seria completa mas estaria violando o **princípio da relatividade** segundo o qual não é possível enviar sinais com velocidade maior do que a da luz. E claro, Einstein preferiu se manter à localidade.

3 Variáveis Ocultas

Uma das ideias que mais se difundiu na tentativa de contornar os problemas conceituais da mecânica quântica e trazê-la de volta ao quadro de ideias das teorias realistas foi a de que as aleatoridades observadas em termos quânticos eram devidas a um conhecimento incompleto dos parâmetros que caracterizavam o estado de um sistema físico. Tentou-se postular que o estado de um sistema quântico seria na verdade determinado por um conjunto de variáveis ainda não observadas, conhecidas como **variáveis ocultas** ou **variáveis escondidas**.⁵ Seriam coordenadas ou *momenta* adicionais, ou mesmo parâmetros com interpretação física não definida,

⁵Em inglês *hidden-variables*.

em número fixo ou não, submetidas a uma dinâmica própria determinista e que, uma vez fixadas, determinariam completamente o estado de um sistema.

Em 1932, John von Neumann apresenta um teorema que estabelece diretamente a impossibilidade de construir uma teoria livre do indeterminismo que nos conduz à contradições com a mecânica quântica,⁶ ou seja, a mecânica quântica não pode completar-se apropriadamente sem que se alterem seus resultados. John von Neumann provou que teorias de variáveis ocultas não poderiam reproduzir todos os resultados da mecânica quântica. Tal prova de impossibilidade sofreu uma ou outra crítica, mas só a partir do trabalho de Bell, em 1966,⁷ é que se esclareceu que tal demonstração, apesar de correta, não exclui todas as teorias de variáveis ocultas possíveis.

John von Neumann “provou” que teorias de variáveis ocultas não poderia existir. No entanto, em 1952,⁸ David Bohm apresentou uma nova versão da antiga interpretação de de Broglie, uma interpretação realista e com variáveis ocultas (as posições e velocidades das partículas) que era consistente com a mecânica quântica, gerando as mesmas previsões que esta! E a prova de von Neumann? Bem, Bohm explicou que em sua teoria, as variáveis ocultas relevantes não pertenciam apenas ao objeto quântico, mas também ao aparelho de medição. Assim, continuava sendo verdade que, dado o estado quântico ψ e o valor das variáveis ocultas λ , o resultado de uma medição seria determinado (apesar de ser impossível conhecer todas as variáveis ocultas relevantes). Acontece que quando medimos a posição x ou a velocidade v_x , o arranjo experimental muda (em acordo com as ideias de Niels Bohr), e assim muda também o conjunto de variáveis ocultas relevantes. Essa propriedade da teoria de David Bohm é chamada de **contextualismo**, e ela é suficiente para escapar da prova de impossibilidade de von Neumann.

Não é difícil mostrar que sempre é possível construir uma descrição em termos de **variáveis ocultas contextuais**. Consideremos as variáveis A e B que comutam, suponhamos que seus valores são determinados por um conjunto de variáveis ocultas λ , e consideremos um vetor estado próprio simultâneo λ de A e B ; segue que

$$A|\lambda\rangle = A(\lambda)|\lambda\rangle, \quad B|\lambda\rangle = B(\lambda)|\lambda\rangle. \quad (5)$$

Podemos agora escrever a média, i.e., o valor esperado do produto dos resultados A e B , por

$$\begin{aligned} E(A^n B^m) &= \langle \psi | A^n B^m | \psi \rangle = \int \langle \psi | A^n | \lambda \rangle \langle \lambda | B^m | \psi \rangle d\lambda \\ &= \int \langle \psi | \lambda \rangle \langle \lambda | \psi \rangle A^n(\lambda) B^m(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} A^n(\lambda) B^m(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

⁶J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (1932).

⁷J. S. Bell, *Review of Modern Physics*, **38**, 447-452 (1966).

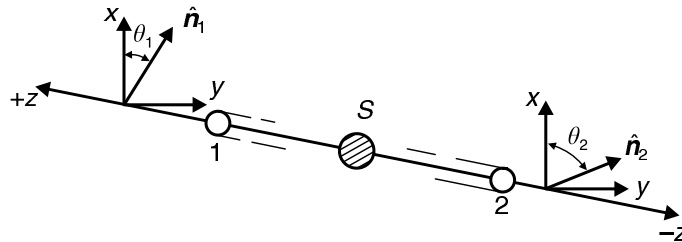
⁸D. Bohm, *Physical Review*, **85**, 166 (1952); *Ibidem*, 180 (1952).

onde Λ é o espaço dos estados completos λ e onde também introduzimos a densidade $\rho(\lambda) = |\langle \lambda | \psi \rangle|^2$. Como isto é válido para qualquer m e n , está demonstrado que o valor esperado de qualquer função de A e B que pode desenvolver-se em **série de Taylor** pode expressar-se como a média sobre uma densidade de variáveis ocultas específicas. As variáveis ocultas dessa teoria são contextuais porque o conjunto $\{\lambda\}$ está definido especificamente para A e B ; para outro conjunto de variáveis compatíveis, como A e C , requer-se uma troca de representação e será um outro conjunto $\{\lambda'\}$ de variáveis apropriadas.

4 Teorema de Bell

Em 1964 Bell, utilizando as proposições 1 a 4 de EPR juntamente com as predições da mecânica quântica, demonstra uma contradição, provando que o emprego das proposições de localidade, realidade e completeza teórica são incompatíveis com as predições da mecânica quântica. Bell equacionou essa contradição numa desigualdade, derivada do paradoxo apresentado por EPR, com argumentos válidos para a física clássica, que deve ser violada no caso da mecânica quântica ser válida. Esta desigualdade permite a verificação experimental e até o presente, todas elas confirmaram a validade da mecânica quântica.⁹

Para demonstrar o teorema de Bell retornamos ao *Gedankenexperiment* de Bohm esquematizado na próxima figura, onde mostra a fonte S que emite um par de partículas *spin* $\frac{1}{2}$, 1 e 2, no estado dado pela Eq. (1), a partícula i ($i = 1, 2$) entra no aparato Stern-Gerlach orientado ao longo de \hat{n}_i , atrás de cada um dos aparatos estão dois detectores, omissos na figura, que registram o resultado que será ou para cima, ou para baixo. A partícula 1 é sujeita a uma medida pelo aparato Stern-



Gerlach com campo magnético orientado ao longo de \hat{n}_1 . O resultado da medida é

⁹S. J. Freedman and J. F. Clauser, *Physical Review Letters*, **28**, 938-941 (1972); J. F. Clauser and M. A. Horne, *Physical Review*, **D10**, 526-535 (1974); A. Aspect, *Physical Review*, **D14**, 1944-1951 (1976); J. F. Clauser and A. Shimony, *Reports of Progress in Physics*, **41**, 1881-1927 (1978); A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Physical Review Letters*, **49**, 91 (1982); A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, **49**, 1804 (1982); A. Aspect and P. Grangier, *Experiments on Einstein-Podolsky-Rosen-type Correlations with Pairs of Visible Photons*, in R. Penrose and C. J. Isham (orgs.), *Quantum concepts in space and time*, (1986).

indexado por $+1$ se a componente \hat{n}_1 do *spin* é para cima, e -1 se é para baixo. A partícula 2 é submetida a uma medida similar, com o campo magnético ao longo de \hat{n}_2 . Assumindo que o sistema formado pelas duas partículas têm *spin* total zero, escrevemos a função de onda como sendo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2] \quad (7)$$

onde $|+\rangle_1$ e $|-\rangle_1$ representam estados *up* e *down* respectivamente, ao longo da direção \hat{n} para a partícula 1 e $|+\rangle_2$ e $|-\rangle_2$ com significado análogo para a partícula 2 com a mesma direção \hat{n} . Da relação (7) podemos obter as probabilidades conjuntas:¹⁰

$$\begin{aligned} P_{++}^\psi &= \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} & P_{+-}^\psi &= \frac{1}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2} \\ P_{-+}^\psi &= \frac{1}{2} \text{cos}^2 \frac{\theta}{2} & P_{--}^\psi &= \frac{1}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

onde o primeiro subscrito indica se o resultado da medida na partícula 1 é $+1$ ou -1 , e o segundo subscrito é análogo para a partícula 2 e \hat{n}_1 e \hat{n}_2 são as direções ao longo das quais o *spin* é medido. Com essas probabilidades construímos o valor esperado do resultado das medidas, definido por

$$E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = P_{++}^\psi - P_{+-}^\psi - P_{-+}^\psi + P_{--}^\psi \quad (9)$$

cujos valores dependem do ângulo entre as direções \hat{n}_1 e \hat{n}_2 , resultando em

$$E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = -\cos \theta = -\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 . \quad (10)$$

No caso especial em que $\hat{n}_1 = \hat{n}_2$ temos correlação perfeita e o valor é -1 . A relação (9) é o resultado quântico. Vejamos o que podemos inferir sobre o caso clássico.

Bell utiliza o argumento de EPR e introduz λ que representa um conjunto de variáveis que definem de maneira *completa* o estado das duas partículas, e que determinam o resultado das medidas de *spin*. O resultado da medida A ao medir o *spin* da partícula 1 é determinado exclusivamente pela direção de \hat{n}_1 e λ , e o resultado B de medir ao longo de \hat{n}_2 ; exclusivamente por \hat{n}_2 e λ , onde os versores \hat{n}_1 e \hat{n}_2 formam o ângulo θ entre si. Então

$$A = A(\lambda, \hat{n}_1) = \pm 1, \quad B = B(\lambda, \hat{n}_2) = \pm 1 . \quad (11)$$

Probabilidades do tipo $A = A(\lambda, \hat{n}_1, \hat{n}_2)$ e $B = B(\lambda, \hat{n}_1, \hat{n}_2)$ são excluídas. Essa é a condição de localidade. A distribuição normalizada das densidades de probabilidades de **variáveis ocultas** depende exclusivamente de λ ,

$$\rho = \rho(\lambda) \quad (12)$$

¹⁰D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger, *American Journal of Physics*, **58**, 1131 (1990).

e possibilidades do $\rho = \rho(\lambda, \hat{n}_1, \hat{n}_2)$ são excluídas. A partir destes pressupostos o valor esperado do produto dos resultados A e B será dado por

$$E^\rho(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = \int_{\Lambda} A(\lambda, \hat{n}_1)B(\lambda, \hat{n}_2) \rho(\lambda) d\lambda \quad (13)$$

onde Λ é o espaço dos estados completos λ .

Visto que o argumento de EPR partiu da premissa de correlações perfeitas que se observam na mecânica quântica (proposição 1), é essencial que o valor esperado da Eq. (13) concorde com o valor da Eq. (10) quando $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = \hat{n}$:

$$E^\rho(\hat{n}, \hat{n}) = E^\psi(\hat{n}, \hat{n}) \quad (14)$$

o que constitui um vínculo muito forte. Uma vez que o menor valor do produto de $A(\lambda, \hat{n})B(\lambda, \hat{n})$ é -1 (o único outro valor possível é $+1$), a Eq. (14) apenas é satisfeita para um conjunto de valores de λ para os quais $A(\lambda, \hat{n}) = -B(\lambda, \hat{n})$ tem probabilidade de medida $+1$, ou, segundo a notação introduzida acima, a menos que $\rho(\lambda)$ seja igual a 1 para cada \hat{n} . Sendo $A(\lambda, \hat{n}_1)B(\lambda, \hat{n}_2) = -1$ apenas quando $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = \hat{n}$, e teremos que $A(\lambda, \hat{n}) = -B(\lambda, \hat{n})$ onde

$$E^\rho(\hat{n}_1, \hat{n}_2) = - \int_{\Lambda} A(\lambda, \hat{n}_1)A(\lambda, \hat{n}_2) \rho(\lambda) d\lambda . \quad (15)$$

Escolhendo três direções arbitrárias \hat{a} ; \hat{b} e \hat{c} , podemos construir a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c}) &= - \int_{\Lambda} [A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{b}) - A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{c})] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} [-A(\lambda, \hat{a})A(\lambda, \hat{b})] [1 - A(\lambda, \hat{b})A(\lambda, \hat{c})] \rho(\lambda) d\lambda . \end{aligned} \quad (16)$$

Como para todos os λ , o produto $-A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b}) = \pm 1$, onde

$$|A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b})| = 1 \quad \text{e} \quad 1 - A(\lambda, \hat{b})A(\lambda, \hat{c}) \geq 0 ,$$

temos com isso a possibilidade de escrever

$$|E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int_{\Lambda} [1 - A(\lambda, \hat{b})A(\lambda, \hat{c})] \rho(\lambda) d\lambda = 1 + E^\rho(\hat{b}, \hat{c}) \quad (17)$$

da qual obtemos a **desigualdade de Bell**:

$$|E^\rho(\hat{a}, \hat{b}) - E^\rho(\hat{a}, \hat{c})| - E^\rho(\hat{b}, \hat{c}) - 1 \leq 0 . \quad (18)$$

Para mostrar a discordância entre essa desigualdade com os resultados da mecânica quântica, expressos pela relação (10), obtemos, escolhendo para as direções de \hat{a} ; \hat{b}

e de \hat{c} os ângulos azimutais de 0 , $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$, respectivamente, os seguintes resultados para o valor esperado (10):

$$E^\psi(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{1}{2}, \quad E^\psi(\hat{b}, \hat{c}) = -\frac{1}{2}, \quad E^\psi(\hat{a}, \hat{c}) = \frac{1}{2}$$

substituindo em (18), temos

$$|E^\psi(\hat{a}, \hat{b}) - E^\psi(\hat{a}, \hat{c})| - E^\psi(\hat{b}, \hat{c}) - 1 = \frac{1}{2} \leq 0 \quad (19)$$

ou seja, em conflito com a desigualdade de Bell. Não existe escolha, de acordo com as proposições, de 1 até 4, do argumento EPR, para os λ , funções A e B , e para ρ que possam fornecer concordância com as previsões da mecânica quântica dada pela Eq. (10).

4.1 Desigualdade CHSH

A limitação mais severa da desigualdade de Bell é pelo fato de que foi feito uso essencial da existência de correlação, ou anticorrelação, perfeita entre resultados obtidos nos dois subsistemas, tornando sua aplicação bem restrita, pois esse tipo de correlação não é geral quando temos estados emaranhados. Essa limitação foi removida por Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) em 1969, obtendo uma nova desigualdade com hipóteses menos restritivas.¹¹ A hoje chamada **desigualdade CHSH** foi rededuzida por Bell em 1971,¹² com um novo método mais cuidadoso para as hipóteses envolvidas. Esta dedução segue passos semelhantes aos usados na dedução anterior, embora evitando a hipótese de correlação completa e considerando correlações envolvendo não apenas três direções, mas quatro (dois pares) de direções distintas, \hat{a} e \hat{a}' para o primeiro subsistema e \hat{b} e \hat{b}' para o segundo. O ponto de partida envolve valores esperados semelhantes aos usados anteriormente, ver Eq. (13):

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b}) \rho(\lambda) d\lambda$$

onde $A(\lambda, \hat{a}) = \pm 1$, $B(\lambda, \hat{b}) = \pm 1$, $\rho(\lambda) \geq 0$ e $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$. Segundo Bell, as novas quantidades $A(\lambda, \hat{a})$ e $B(\lambda, \hat{b})$ diferem das antigas por médias sobre “variáveis ocultas” que permitem “indeterminismo com um certo caráter local” nos sistemas de medida. Ou, segundo a versão de Clauser e Shimony,¹³ permite que em algumas das oportunidades um, ou o outro, ou ainda os dois sistemas de detecção não registrem

¹¹J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Physical Review Letters*, **23**, 880 (1969).

¹²J. S. Bell, *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”*, course II: Foundations of Quantum Mechanics. Academic Press, New York, 171-181 (1971).

¹³J. F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Progr. Phys.*, **41**, 1881 (1978).

nenhum dos dois valores possíveis ± 1 , situação a que é atribuído o valor zero. Dessa forma, temos

$$A(\lambda, \hat{a}) \leq 1 \quad B(\lambda, \hat{b}) \leq 1 . \quad (20)$$

Assim, escolhendo as quatro direções distintas \hat{a} , \hat{a}' , \hat{b} e \hat{b}' , podemos construir a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}') &= \int [A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b}) - A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b}')] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= \int [A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b}) \{1 \pm A(\lambda, \hat{a}')B(\lambda, \hat{b}')\}] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad - \int [A(\lambda, \hat{a})B(\lambda, \hat{b}') \{1 \pm A(\lambda, \hat{a}')B(\lambda, \hat{b})\}] \rho(\lambda) d\lambda . \end{aligned} \quad (21)$$

Usando (20) obtemos

$$\begin{aligned} |E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}')| &\leq \int [1 \pm A(\lambda, \hat{a}')B(\lambda, \hat{b}')] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \int [1 \pm A(\lambda, \hat{a}')B(\lambda, \hat{b})] \rho(\lambda) d\lambda \\ &= 2 \pm |E(\hat{a}', \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b})| . \end{aligned} \quad (22)$$

Essa relação pode ser escrita da forma “mais simétrica”, segundo Bell, como

$$|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}')| + |E(\hat{a}', \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b})| \leq 2 \quad (23)$$

ou ainda sob a forma de CHSH

$$-2 \leq E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b}) \leq 2 \quad (24)$$

Escolhas diferentes dentre as direções \hat{a} , \hat{a}' , \hat{b} e \hat{b}' ao escrever a relação (21) produzem ainda outras formas dessa desigualdade, em que o sinal negativo (único) aparece em qualquer das quatro funções de correlação envolvidas.

4.1.1 Violação dessa Desigualdade pela Mecânica Quântica

Escolhendo \hat{a} , \hat{b} , \hat{a}' e \hat{b}' no plano zx , fazendo com o eixo z ângulos respectivamente de $\frac{n\pi}{4}$, $n = 0, 1, 2, 3$, resulta, para o estado singlete de dois spins,

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = -E(\hat{a}, \hat{b}') = E(\hat{a}', \hat{b}') = E(\hat{a}', \hat{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

o que nos dá

$$|E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}')| + |E(\hat{a}', \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b})| = 2\sqrt{2} . \quad (25)$$

Utilizando a **desigualdade de Cauchy-Schwarz** é possível obter diretamente o valor $2\sqrt{2}$ como limite nessa desigualdade no caso da mecânica quântica, de modo que esse estado e a configuração na realidade saturam esse limite quântico.¹⁴

¹⁴João C. A. Barata, *Desigualdades de Bell*, em 100 anos de Física Quântica, M. S. Hussein e S. R. A. Salinas, eds., Editora Livraria da Física (2002).

5 Experimento de Aspect

As experiências desenvolvidas por Aspect e colaboradores não foram realizadas com partículas de *spin* $\frac{1}{2}$, como sugerido acima, mas sim usando um par de fótons e as grandezas medidas não foram *spins* mas sim polarizações dos dois fótons que emergiram de um decaimento entre estados atômicos com variação zero de *momentum* angular total.¹⁵ Nesses experimentos foram necessários produzir *fótons entrelaçados* através de uma cascata de cálcio.

O átomo de cálcio emite dois fótons do nível $4s^2\ ^1S_0$ para o nível $4p^2\ ^1S_0$. Para decair em seu estado fundamental, eles precisam passar pelo nível $4s^14p^1\ ^1P_1$. Como a transição $m = 0$ para $m = 0$ é proibida, então existe somente dois caminhos possíveis. Em um dos caminhos ambos fótons são circularmente polarizados à direita R , no outro ambos fótons são circularmente polarizados à esquerda L . Assim,

$$\psi(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|RR\rangle + |LL\rangle) ,$$

que poderá ser reformulada em base linear como

$$\psi(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|xx\rangle + |yy\rangle) .$$

O primeiro arranjo experimental,¹⁶ é muito parecido ao *Gedankenexperiment*, já discutido anteriormente. Depois de serem produzidos, os dois fótons são separados por filtros sensíveis aos diferentes comprimentos de onda. Foram usados lentes para direcionar o feixe aos polarizadores o qual podiam girar em torno do eixo z . Posteriormente, fotomultiplicadoras mediam os fótons e enviavam seus sinais para um contador de coincidências, no qual calculava o coeficiente de correlação entre os dois fótons. A fim de verificar a relação (23), e como resultado obtiveram

$$S_{\text{exp}} = 2,697 \pm 0,015 ,$$

verificando uma violação da desigualdade de Bell, relação (23), e uma boa concordância com a previsão da mecânica quântica, relação (25),

$$S_{\text{MQ}} = 2,70 \pm 0,05 .$$

O erro neste valor teórico se deve a ligeira imperfeição dos polarizadores. A diferença entre o valor experimental e teórico é causado pelas lentes colocadas após os filtros.

¹⁵A. Aspect, *Physical Review*, **D14**, 1944–1951 (1976); A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Physical Review Letters*, **47**, 460–463 (1981); *Idem*, **49**, 91 (1982); A. Aspect, J. Dalibart, and G. Roger, *Physical Review Letters*, **49**, 1804 (1982).

¹⁶A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, *Physical Review Letters*, **49**, 91 (1982).

O segundo arranjo experimental,¹⁷ os dois fótons também são separados por filtros sensíveis aos diferentes comprimentos de onda. Os polarizadores tinham um arranjo que variavam do canal contendo \hat{a} e \hat{b} para o canal contendo \hat{a}' e \hat{b}' . Posteriormente, fotomultiplicadoras mediam os fótons e enviavam seus sinais para um contador de coincidências, no qual calculava o coeficiente de correlação entre os dois fótons.

Nesse experimento, a mudança entre os dois canais ocorria aproximadamente a cada 10 ns. Desde que esse tempo, bem como a vida média do nível intermediário da cascata de cálcio (5 ns), é pequeno comparado ao $\frac{L}{c} = 40$ ns (os detectores estão separados por uma distância L de 12 m), uma detecção do evento em um lado do experimento e a correspondente troca de orientação do outro lado estão separados por um intervalo tipo espaço em um cone de luz relativístico.¹⁸ Todavia, não era possível fazer a mudança dos canais de forma verdadeiramente randômica. Sendo assim, foram usadas duas diferentes frequências para troca de canais, fazendo com que fosse quase periódica. Assim, podemos escrever uma desigualdade de Bell ainda sob uma forma similar de CHSH:¹⁹

$$-1 \leq S \leq 0 ,$$

onde

$$S = E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b}) + E(\hat{a}', \hat{b}') - E(\hat{a}', \infty) - E(\infty, \hat{b}) .$$

Note que S envolve as quatro taxas usuais de medida além de duas outras, $E(\hat{a}', \infty)$ e $E(\infty, \hat{b})$, com um polarizador removido em cada lado. Como resultado obtiveram

$$S_{\text{exp}} = 0,101 \pm 0,020 ,$$

verificando uma violação da desigualdade $S \leq 0$ e uma boa concordância com previsão da mecânica quântica $S_{\text{MQ}} = 0,112$.

As experiências confirmam inteiramente a validade da teoria quântica e nas palavras de Aspect: “Temos de concluir que um par de fótons entrelaçados é um objeto não separável; ou seja, é impossível atribuir propriedades locais (realidade física local) a cada fóton. Em certo sentido, ambos os fótons permanecem em contato através do espaço e do tempo. Convém que se diga, no entanto, que a não separabilidade, que é a base da teleportação quântica, não implica a possibilidade prática de comunicação, a velocidade superior à da luz”.²⁰

Recentemente foram desenvolvidos vários experimentos de grande precisão que mostram a violação da desigualdade de Bell, além dos desenvolvidos por Aspect.²¹

¹⁷A. Aspect, J. Dalibart, and G. Roger, *Physical Review Letters*, **49**, 1804 (1982).

¹⁸Para uma revisão de relatividade ver: W. Pauli, *Theory of relativity*, (1958).

¹⁹J. F. Clauser and M. A. Horne, *Physical Review*, **D10**, 526 (1974).

²⁰A. Aspect, *Nature*, **398**, 189-190 (1999).

²¹G. Weihs *et al.*, *Physical Review Letters*, **81**, 5039-5043 (1998); W. Tittel *et al.*, *Physical*

6 Teoria das Variáveis Ocultas Não Locais

Em 2003, Leggett obtém desigualdades tipo Bell para “formas aceitáveis” de “realismo não local” e formula um **teorema de incompatibilidade**.²²

É suficiente, para nossa explanação, discutir sistemas quânticos bidimensionais. Iremos focalizar nossa descrição no grau de liberdade da polarização de fótons. As teorias estão baseadas nas seguintes proposições:

1. Todas as medidas das partículas produzidas são determinadas por propriedades pré-existentes dessas partículas independente da medida (**realismo**);
2. Estados físicos são misturas estatísticas de *subensembles* com polarizações definidas;
3. Polarização é definida tal que os valores esperados para cada *subensemble* obedecem a **lei de Malus**, que é a conhecida dependência em cosseno da intensidade de um feixe polarizado após passar por um polarizador ideal.

Essas proposições são atraentes porque trazem uma explanação natural de estados separáveis *quantum* mecanicamente (estados polarizados realmente obedecem a lei de Malus). Em adição, essas proposições não requerem explicitamente a localidade, i.e., as medidas realizadas dependem de parâmetros nas regiões separadas do tipo espaço. Como consequência, tais teorias podem explicar importantes características de **estados emaranhados** (não separáveis) da mecânica quântica:

- Não podemos transmitir informações mais rápida do que a velocidade da luz;
- Reproduz correlações perfeitas para todas as medidas na mesma base, a qual é uma característica fundamental do estado singleto de Bell;
- Nos leva à um modelo na qual a desigualdade Clauser, Horne, Shimony and Holt (CHSH) é violada.

Todavia, todos os modelos baseados nas proposições de 1-3 apresentam variações com outras previsões quânticas.

A estrutura geral de tais modelos é a seguinte: da proposição 1 requer que uma medida binária individual A para uma medida de polarização ao longo da direção

Review Letters, **81**, 3563-3566 (1998); C.-Z. Peng *et al.*, Physical Review Letters, **94**, 150501 (2005); S. Cröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, Č. Brukner, M. Żukowski, M. Aspelmeyer and A. Zeilinger, Nature, **446**, 871 (2007).

²²A. J. Leggett, Foundations of Physics, **33**, 1469-1493 (2003).

\hat{a} é predeterminada algum conjunto de variáveis ocultas λ , um vetor tridimensional \vec{u} , bem como por um outro conjunto de possíveis parâmetros não locais η (medindo em regiões separadas do tipo espaço), i.e., $A = A(\lambda, \vec{u}, \hat{a}, \eta)$. De acordo com a proposição 3, partículas com o mesmo \vec{u} mas com diferente λ constroem *subensembles* de polarização definida descrita por uma distribuição de probabilidade $\rho_{\vec{u}}(\lambda)$. O valor esperado de A , aqui representado por $\bar{A}(\vec{u})$, obtido pela média sobre todos λ , obedecendo a lei de Malus, é

$$\bar{A}(\vec{u}) = \int A(\lambda, \vec{u}, \hat{a}, \eta) \rho_{\vec{u}}(\lambda) d\lambda = \vec{u} \cdot \hat{a} .$$

Finalmente, com a proposição 2, o valor esperado medido para um estado físico geral é dado pela média sobre a distribuição $F(\vec{u})$ dos *subensembles*, tal que

$$\langle A \rangle = \int F(\vec{u}) \bar{A}(\vec{u}) d\vec{u} .$$

Vamos considerar um caso específico, o qual emite um par de fótons com polarizações bem definidas \vec{u} e \vec{v} para os laboratórios A e B , respectivamente. As medidas de polarização local de A e de B são completamente determinadas pelo vetor polarização, por um conjunto adicional de variáveis ocultas λ específica da fonte que produziu os fótons e por um conjunto de parâmetros não locais η fora da fonte. Para esclarecimento, podemos escolher uma dependência não local explícita dos fótons na montagem \hat{a} e \hat{b} dos aparelhos de medição. Note, entretanto, que este é justamente um exemplo de dependência não local, e que podemos escolher qualquer outro conjunto fora do parâmetro η . Cada par de fótons emitidos está completamente definido pela distribuição $\rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda)$ do *subensemble*. De acordo com a proposição 3 temos as seguinte relações onde todas as polarizações e medidas de direções estão representadas como vetores na esfera de Poincaré.²³

$$\bar{A}(\vec{u}) = \int A(\hat{a}, \hat{b}, \lambda) \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda) d\lambda = \vec{u} \cdot \hat{a} , \quad (26)$$

$$\bar{B}(\vec{v}) = \int B(\hat{b}, \hat{a}, \lambda) \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda) d\lambda = \vec{v} \cdot \hat{b} . \quad (27)$$

Assim, a função de correlação dos resultados medidos será:

$$\overline{AB}(\vec{u}, \vec{v}) = \int A(\hat{a}, \hat{b}, \lambda) B(\hat{b}, \hat{a}, \lambda) \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda) d\lambda . \quad (28)$$

Para uma fonte geral produzindo misturas de fótons polarizados, as correlações observáveis são médias sobre uma distribuição de polarizações $F(\vec{u}, \vec{v})$, e a função geral da correlação E será dada por

$$E = \langle A B \rangle = \int F(\vec{u}, \vec{v}) \overline{AB}(\vec{u}, \vec{v}) d\vec{u} d\vec{v} . \quad (29)$$

²³Para uma revisão da esfera de Poincaré ver: M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of Light*, (1964).

Uma característica importante desse modelo é que existem *subensembles* de polarizações definidas (independentes das medidas) e que as previsões para os *subensembles* concordam com a lei de Malus. Está claro que outras classes de teorias não locais, possivelmente ou completamente em concordância com as previsões da mecânica quântica, não tenham essa propriedade quando reproduzem estados emaranhados.²⁴ Um caso específico está na teoria de Bohm.²⁵ Nesse trabalho, as correlações não locais são consequências do potencial quântico não local, o qual exercem torques consideráveis nas partículas principais do experimento afetando seus resultados e deixando-os em concordância com a mecânica quântica. Nessa teoria, nenhuma das duas partículas no estado emaranhado carregam qualquer *momentum* angular, em um todo, quando emergem da fonte.²⁶ Diferentemente, no modelo de Leggett, é o *ensemble* total emitido por uma fonte que carrega nenhuma informação do *momentum* angular, o qual é uma consequência da média sobre todas as partículas individuais com *momenta* angular bem definido (polarização).

As teorias descritas aqui são incompatíveis com a teoria quântica. A ideia básica do teorema de incompatibilidade usa a seguinte identidade, com $A = \pm 1$ e $B = \pm 1$:²⁷

$$-1 + |A + B| = AB = 1 - |A - B|. \quad (30)$$

Aplicamos essa identidade para resultados de medidas dicotômicas

$$A = A(\hat{a}, \hat{b}, \lambda) = \pm 1 \quad \text{e} \quad B = B(\hat{b}, \hat{a}, \lambda) = \pm 1.$$

É claro que os valores de A e B são mutuamente dependentes um do outro, diferentemente da desigualdade CHSH que assume que A e B não dependem um do outro. Da Eq. (30) podemos tirar a média sobre todos os *subensembles* com polarização definida,

$$-1 + \int |A + B| \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda) d\lambda = \int AB \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda) d\lambda = 1 - \int |A - B| \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\lambda) d\lambda. \quad (31)$$

Assim,

$$-1 + \overline{|A + B|} = \overline{AB} = 1 - \overline{|A - B|}. \quad (32)$$

Como a média dos módulos é maior que ou igual aos módulos das médias, temos

$$-1 + \overline{|A + B|} \leq \overline{AB} \leq 1 - \overline{|A - B|}. \quad (33)$$

Em particular, desde que A escolha suas observáveis de um conjunto de duas montagens \hat{a}_1 e \hat{a}_2 , e B faça o mesmo de um conjunto de três montagens \hat{b}_1 , \hat{b}_2

²⁴D. Bacon and B. F. Toner, Physical Review Letters, **90**, 157904 (2003); Y. Ne'eman, Foundations of Physics, **16**, 361 (1986).

²⁵D. Bohm, Physical Review, **85**, 166 (1952).

²⁶C. Dewdney, P. R. Holland, and A. Kyprianidis, J. Phys. A: Math. Gen., **20**, 4717 (1987).

²⁷A. J. Leggett, Foundations of Physics, **33**, 1469-1493 (2003).

e $\hat{b}_3 = \hat{a}_2$, podemos introduzir a lei de Malus, Eqs. (26) e (27), na Eq. (33), e usar da expressão (29), para encontrar uma desigualdade generalizada do tipo Leggett

$$S_{\text{NLHV}} = |E_{11}(\varphi) + E_{23}(0)| + |E_{22}(\varphi) + E_{23}(0)| \leq 4 - \frac{4}{\pi} \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|, \quad (34)$$

onde $E_{kl}(\varphi)$ é a média uniforme de todas as funções de correlação, definida no plano \hat{a}_k e \hat{b}_l , com o mesmo ângulo relativo φ ; o índice subscrito NLHV significa **variáveis ocultas não locais**. Para aplicarmos essa desigualdade, os vetores \hat{a}_1 e \hat{b}_1 necessariamente estão em um plano ortogonal em relação a outro definido por \hat{a}_2 e \hat{b}_2 . Essa é diferença com a configuração experimental padrão usada na verificação da desigualdade CHSH.

7 Experimento de Zeilinger

Teste experimental realizado por Zeilinger e colaboradores, em 2007,²⁸ inclui teste simultâneo de **realismo local** (desigualdade CHSH) e mostra violação simultânea (ou seja, nos mesmos dados) das desigualdades referentes aos dois tipos de realismo, ou seja, CHSH e Leggett.

Nesse experimento um cristal de Borato de Bário Beta (BBO) recebe o feixe de laser e produz, via **conversão descendente paramétrica espontânea**, o par de fótons emaranhados. Assim, temos o estado emaranhado

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_A |V\rangle_B - |V\rangle_A |H\rangle_B],$$

onde H denota a polarização horizontal do fóton e V denota a polarização vertical do fóton.

Um primeiro arranjo estudado apresenta: **(A)**, o feixe de laser indo de encontro ao cristal não linear NL , feito de BBO, e um par de fótons emaranhados sendo criado, como descrito acima, e suas polarizações detectadas pelos contadores de fótons, medidas locais em A e B são realizadas ao longo das direções \hat{a} e \hat{b} na esfera de Poincaré, respectivamente. Dependendo da direção das medidas, as correlações obtidas podem ser usadas para testar a desigualdade de Bell ou a desigualdade de Leggett; **(B)**, correlações em um plano da esfera de Poincaré (H (V) denota a polarização horizontal (vertical)), permite realizar um teste da desigualdade de Bell e foi proposta por Freedman e Clauser;²⁹ **(C)**, correlações em planos ortogonais, note que quando as medidas são realizadas no primeiro plano estamos testando a desigualdade de Bell através de CHSH, porém se as medidas são realizadas no outro

²⁸S. Cröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, Č. Brukner, M. Żukowski, M. Aspelmeyer and A. Zeilinger, Nature, **446**, 871 (2007).

²⁹S. J. Freedman and J. F. Clauser, Physical Review Letters, **28**, 938 (1972).

plano (ortogonal ao primeiro) estamos testando a teoria das variáveis ocultas não locais, i.e., a desigualdade de Leggett.

Considere as previsões quântica para um estado singlete de dois fótons polarizados,

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_A |V\rangle_B - |V\rangle_A |H\rangle_B] ,$$

onde, por exemplo, $|H\rangle_A$ denota um fóton horizontalmente polarizado propagando-se para A . A função de correlação quântica para as medidas de \hat{a}_k e \hat{b}_l executadas pelos fótons depende somente do ângulo relativo entre esses vetores, e

$$E_{kl} = -\hat{a}_k \cdot \hat{b}_l = -\cos \varphi .$$

Então, o lado esquerdo da desigualdade (34), para previsão quântica, registra $|2(\cos \varphi + 1)|$. A violação máxima de (34) é para o ângulo $\varphi_{\max} = 18,8^\circ$. Para esse ângulo otimizado, o limite dado por (34) é 3,792 e o valor quântico é 3,893. A razão entre esses dois valores nos dá a visibilidade crítica de 97,4%. Estes valores excluem os modelos de não localidade.

Com os mesmo valores para testar a validade dos modelos não locais, i.e., desigualdade de Leggett, pode ser feito um teste de validade de CHSH. Assim, tomando o lado esquerdo da desigualdade

$$S_{\text{CHSH}} = |E_{11} + E_{12} - E_{21} + E_{22}| \leq 2 \quad (35)$$

e usado os valores otimizados, iguais ao usados em (34), encontramos 2,2156. Note que para observar a violação de um experimento tipo Bell (CHSH), a visibilidade mínima é aproximadamente 71%, e o valor obtido foi 90,3%.

Um segundo arranjo estudado mostra: Inicialmente o cristal de BBO está alinhado para produzir o estado singlete emaranhado e polarizado,

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_A |V\rangle_B - |V\rangle_A |H\rangle_B] .$$

Os fótons produzidos, espacial e temporal, são compensados por uma combinação de lâminas de meia onda ($\lambda/2$) adicionadas a cristais BBO (BBO/2). Na esfera de Poincaré foram realizadas medidas dos polarizadores de A e de B para uma máxima violação da desigualdade (34). O vetor \hat{b}_2 está no plano yz e foi introduzido mais uma lâmina de $\lambda/4$ do comprimento de onda no lado de B . Os planos indicam as direções medidas para várias diferenças de ângulos para ambas desigualdades.

Em termos da taxa de contagem experimental, a função de correlação $E(\hat{a}, \hat{b})$, para um dado par de conjuntos de medidas gerais, é definida por

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{N_{++} + N_{--} - N_{+-} - N_{-+}}{N_{++} + N_{--} + N_{+-} + N_{-+}} , \quad (36)$$

onde N_{AB} é o número de eventos em coincidência entre A e B medidas dentro do tempo integral. Designamos o número $+1$, se A (B) detecta um fóton polarizado ao longo de \hat{a} (\hat{b}), e -1 para a direção ortogonal \hat{a}^\perp (\hat{b}^\perp). Por exemplo, N_{+-} denota o número de coincidências na qual A obteve \hat{a} e B obteve \hat{b}^\perp . Note que $E(\hat{a}_k, \hat{b}_l) = E_{kl}(\varphi)$, onde φ é a diferença de ângulo entre os vetores \hat{a} e \hat{b} na esfera de Poincaré.

Nesse arranjo, para investigação da classe de teorias de variáveis ocultas não locais, os dados experimentais mostram que a desigualdade de Leggett é visivelmente violada para $4^\circ < \varphi < 36^\circ$ com um máximo observado em $\varphi_{\max} \approx 20^\circ$. Usando esse ângulo máximo, temos $S_{\text{NLHV}} = 3,8521 \pm 0,0227$, i.e., viola a desigualdade (34) em 3,2 desvios padrão. Ao mesmo tempo, esses dados experimentais mostram que a desigualdade CHSH terá um valor $S_{\text{CHSH}} = 2,1780 \pm 0,0199$, i.e., viola a desigualdade (35) em aproximadamente 9 desvios padrão.

Este experimento, realizado por Zeilinger e colaboradores, mostra de modo convincente a violação simultânea (ou seja, nos mesmos dados) das desigualdades referentes as desigualdades de CHSH e de Leggett. Outros experimentos também mostraram violações da desigualdade de Leggett.³⁰

Para concluir esse artigo, talvez seja oportuno citar Feynman em um artigo de 1982: "... ainda não é óbvio, para mim, que não há um problema real (com a mecânica quântica). Não posso definir o problema, portanto suspeito que não há problema, mas não estou seguro de que não há problema. Por isso, gosto de investigar as coisas".³¹ Então eu digo: Ainda não é óbvio para mim ...

³⁰T. Paterek, A. Fedrizzi, S. Cröblacher, Th. Jennewein, M. Żukowski, M. Aspelmeyer and A. Zeilinger, *Physical Review Letters*, **99**, 210406 (2007); C. Branciard, A. Ling, N. Gisin, Ch. Kurtsiefer, A. Lamas-Linares and V. Scarani, *Physical Review Letters*, **99**, 210407 (2007); C. Branciard, N. Brunner, N. Gisin, Ch. Kurtsiefer, A. Lamas-Linares, A. Ling and V. Scarani, arXiv:0801.2241v1 [quant-ph], to appear in *Nature Physics* (2008).

³¹R. Feynman, *International Journal of Theoretical Physics*, **21**, 467 (1982).