A Gravitação como Resultado da Conexão entre as Leis de Kepler e de Newton.

J.H.O. Sales[1], A. T. Suzuki[2] e Gesil Sampaio[3]
[1,3] *Universidade Estadual de Santa Cruz, and*
[2] *Instituto de Física Teórica, Univ. Estadual Paulista,*
Rua Dr. Bento Teobaldo Ferraz, 271 Bloco II, 01140-070 - São Paulo, SP, Brazil
(Dated: April 30, 2011)

Via de regra, o ensino da lei da gravitação universal de Newton segue um roteiro padrão onde a formulação é apresentada diretamente ao aluno, como algo novo e independente, sem a preocupação de se conectá-la a qualquer outra formulação da dinâmica newtoniana nem sua relação com as leis de Kepler. O presente trabalho indica um caminho simples para dedução da lei da gravitação universal, usando para isso as leis de Kepler, Huygens e as leis da dinâmica de Newton.

PACS numbers: 12.39.Ki,14.40.Cs,13.40.Gp

I. INTRODUÇÃO

Com raríssimas exceções que chamam a atenção pela originalidade e primazia [1], os livros didáticos do ensino médio e mesmo os universitários em nível de graduação geralmente apresentam a famosa fórmula da lei da gravitação universal devida a Isaac Newton como algo pronto, independente e isolado, não havendo nenhuma preocupação em apresentar de maneira histórica os passos que levaram a essa famosa equação. Nesse pequeno trabalho, gostaríamos de resgatar um pouco da história por trás da famosa equação e os fundamentos teóricos e experimentais que conduziram à sua elaboração pelo grande cientista britânico.

A noção de peso como propriedade inerente de um corpo material nas imediações do nosso planeta, considerada por Aristóteles [2], perdurou até a época de Newton, cuja contribuição possibilitou uma revolucionária visão da natureza das forças gravitacionais. Naquela época (segunda metade do século XVII) ainda se acreditava que tudo o que ocorria no espaço conhecido pelo homem (perto da superfície terrestre) era essencialmente diferente do que ocorria fora da terra. Mesmo as três leis de Kepler sobre o movimento planetário não alteravam em nada as idéias relativas aos fenômenos terrestres. Estas leis descreviam e analisavam o movimento observado nos planetas, mas não estabeleciam nenhuma teoria explicativa. As leis de Kepler reproduziam o comportamento cinemático dos planetas (e astros do sistema solar em geral), meticulosamente observados, estudados e analisados por ele e também por Tycho Brahe que o antecedeu e cujas observações muito contribuíram para o seu entendimento do movimento planetário. Entretanto, não se associava a nenhuma causa definida que fosse responsável por esses movimentos.

Os corpos celestes conhecidos cujos movimentos eram estudados mais amiúde naquela época eram a Lua, o Sol e os planetas Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno – essencialmente os mesmos que os da época aristotélica, em função da limitação observacional que era feita a olho nu. Lembrando que Kepler tomou conhecimento do telescópio que veio com seu contemporâneo Galileu somente em 1609.

Historicamente, a idéia geocêntrica prevalecente a respeito dos movimentos planetários surgiu na escola dos filósofos gregos clássicos, para quem os círculos representavam a forma geométrica perfeita. Assim, no seu modelo planetário, os corpos celestes só poderiam descrever círculos concêntricos, tendo a Terra como seu centro, já que pela observação da trajetória solar durante o dia, seu movimento aparente parecia indicar que os demais astros também devessem seguir o mesmo padrão.

Entretanto, à medida que as observações se tornavam mais acuradas e mais dados acerca dos demais planetas eram coletados e analisados, tornou-se evidente aos cientistas gregos que o modelo tinha sérios problemas. Relativamente à Terra, os planetas conhecidos pareciam descrever trajetórias erráticas no céu, ora progressivas e ora retrógradas e a geometria do seu movimento era altamente complexa.

Uma tentativa de harmonizar o movimento observado dos astros com o sistema geocêntrico foi idealizado pelo astrônomo grego Cláudio Ptolomeu [3], de Alexandria, nos idos do século segundo A.D. Ainda considerando que as órbitas devessem ser estritamente circulares, propôs ele que os planetas descreviam com velocidade constante em módulo, um círculo chamado de epiciclo, cujo centro, por sua vez, movia-se num círculo maior, concêntrico com a Terra, denominado de deferente. A trajetória resultante para o planeta era, assim, um epiciclóide.

Em alguns casos, tornava-se necessário uma elaboração ainda mais complicada para descrever o movimento planetário; por exemplo, com a Terra não exatamente no centro da deferente, mas deslocado do mesmo. Em nossa linguagem, o que os gregos fizeram foi descrever o movimento planetário, em relação a um sistema de referência ligado a Terra.

Essa descrição foi aceita como correta até que, no século dezesseis, o monge polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) [4], que procurava uma solução mais simples, propôs que a descrição do movimento de todos os planetas, incluindo a

Terra, fosse feita relativamente ao Sol, que estaria no centro. A idéia não era nova; havia sido proposta inicialmente pelo astrônomo grego Aristarco, por volta do terceiro século a.C. De acordo com Copérnico, relativamente ao Sol, as órbitas dos planetas colocavam-se na seguinte ordem: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, sendo que a Lua girava em torno da Terra. Essencialmente, o que Copérnico propunha era um outro sistema de referência, ligado ao Sol, em relação ao qual o movimento dos planetas tivesse uma descrição mais simples.

O Sol, maior corpo celeste em nosso sistema planetário, coincide, praticamente, com o centro de massa do sistema solar e move-se muito mais lentamente do que qualquer planeta. Isso justifica tomá-lo como centro de referencia, pois praticamente ele é um referencial inercial. A hipótese auxiliou o astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) a descobrir as leis do movimento planetário, como conseqüência de sua cuidadosa análise das medidas astronômicas de Tycho Brahe (1546-1601). Essas leis são chamadas leis de Kepler.

Em 1666, Sir Isaac Newton (1642-1727) formulou as leis da Dinâmica e da Gravitação, mas não foi publicada até 1687, quando apareceu como capítulo de sua monumental obra, a Philosophie Naturalis Principia Mathematica. Nessa obra ele resume toda uma história clássica da mecânica.

II. DEDUÇÃO DA LEI DE HUYGENS

Huygens [5] tomou como verdade as leis de Kepler, que podem ser resumidas nas três proposições seguintes:

1- Todos os planetas movem-se segundo órbitas elípticas, nas quais um dos focos é ocupado pelo Sol.

2- Uma reta imaginária que vai de qualquer planeta ao sol varre áreas iguais em tempos iguais.

3- O quadrado do período de revolução de qualquer planeta ao redor do sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse,

$$T^2 = Cr^3. \tag{1}$$

.

Para o nosso propósito aqui, das três leis somente a primeira e a terceira é que nos interessam; então escrevendo a posição do planeta na órbita na forma vetorial,

$$\vec{r} = (a\cos\phi)\,\vec{i} + (b\sin\phi)\,\vec{j} \tag{2}$$

em que $\phi = \omega t$ com ω sendo a velocidade angular e t o tempo.

O vetor posição dado por (2) descreve uma elipse; e para comprovar isso basta extrair do vetor posição a forma paramétrica de x e y, de tal modo que:

$$x = a\cos\phi \tag{3}$$

$$y = b\sin\phi \tag{4}$$

Como a elipse é dada pela equação

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \ ,$$

segue-se então que

$$\frac{a^2\cos^2\phi}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\phi}{b^2} = 1 \ ,$$

comprovando a afirmação anterior.

Sabendo qual o vetor posição responsável pela trajetória elíptica e de posse da segunda lei de Newton,

$$\vec{F} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} \tag{5}$$

A primeira derivada de $\vec{r}$ em relação ao tempo será

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -(a\omega\sin\omega t)\,\vec{i} + (b\omega\cos\omega t)\,\vec{j}.$$

de modo que a sua segunda derivada será dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\omega^2\vec{r}.$$

Note que nessa última expressão utilizamos o próprio vetor posi¸cão no lado direito. Substituindo esse resultado na expressão para a segunda lei de Newton, temos

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}. \tag{6}$$

Esse resultado é importante, pois, nos diz que existe uma força apontando para o centro ou origem do eixo XY. O resultado nos mostra também que a força e a posição são vetores colineares. Huygens já tinha encontrado esse resultado e o próprio Newton o utiliza para chegar à lei da gravitação universal.

III. LEI DA GRAVITAÇÃO

Escrevendo a frequencia do movimento em função do seu período

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

e levando em conta que em (6) a força e o vetor posição colineares, podemos tomar, em módulo:

$$F = m\frac{4\pi^2}{T^2}r. \tag{7}$$

Utilizando agora a relação estabelecida pela terceira lei de Kepler (1) entre o período e o raio médio (ou semi-eixo maior da elipse), temos:

$$F = \frac{4\pi^2}{C}\frac{m}{r^2}$$

ou seja

$$F \propto \frac{m}{r^2} \tag{8}$$

O resultado (8) foi a demonstração matemática da existência de uma força proporcional ao inverso do quadrado da distâ

Para prosseguirmos desse ponto, temos que voltar à situação (ou o sistema) que estamos estudando. Se na origem dos eixos xy existe um corpo de massa m_j e na distância r dessa origem temos outro corpo, de massa m_k, orbitando aquela primeira, então podemos dizer que a primeira massa é a *causa* da força experimentada ou sentida pela segunda e vice-versa. Representando por F_{jk} essa força devida à massa m_j e sentida por m_k, pela segunda lei de Newton temos que tal força, sentida por m_k, será proporcional à massa m_k. Matematicamente expressamos assim:

$$F_{jk} \propto m_k. \tag{9}$$

Vice-versa, num raciocínio análogo, temos

$$F_{kj} \propto m_j. \tag{10}$$

Tomando-se como verdadeira a terceira lei de Newton (lei da ação e reação)

$$F_{jk} = F_{kj}, \tag{11}$$

segue-se portanto que (9) tem que ser obrigatoriamente escrita também como

$$F_{jk} \propto m_j. \tag{12}$$

Esta proporcionalidade, considerada juntamente com a proporcionalidade original em (9), mostra que a força exercida sobre o corpo de massa m_k pelo corpo de massa m_j é proporcional a ambas as massas. Como uma grandeza que é proporcional a duas outras grandezas independentes deve ser proporcional ao seu produto, podemos escrever, portanto, que

$$F_{jk} \propto m_j m_k. \tag{13}$$

Combinando esta proporcionalidade com a equação (8) (lei do inverso do quadrado), obtemos

$$F_{jk} \propto \frac{m_j m_k}{r^2}$$

Toda proporcionalidade se transforma numa igualdade via uma constante de proporcionalidade; então

$$F_{jk} = G\frac{m_j m_k}{r^2}$$

Dessa forma chega-se à lei da gravitação universal de Newton. A constante G da gravitação universal pode ser relacionada com a constante C da terceira lei de Kepler dos períodos orbitais dos planetas através de $G = 4\pi^2/C$.

IV. CONCLUSÃO

Foi visto nessa dedução que a lei de Newton para a gravitação universal segue um esquema científico rigoroso das observações de Kepler (leis empíricas) - que por sua vez foram baseadas nas importantes contribuições realizadas por Copérnico e Brahe - passando pela teoria da mecânica inventada por Newton - cujas leis dinâmicas foram anteriormente extensivamente estudadas por Galileu da questão da queda dos corpos - sem a qual não seria possível uma dedução da lei da gravitação. É bom observar que Huygens chegou bem perto, porém não conhecia as leis de Newton, e é nesse sentido que devemos muito a Newton.

[1] Suzuki, A.T. e Vasques, R.A., Sistema Interativo de Ensino, Física, fascículo 4, Casa Publicadora Brasileira, 2007.
[2] Bassalo, J. M. F. Parte I. A Crônica da gravitação, Editora Universidade Federal do Pará, 1991.
[3] Bassalo, J. M. F. Parte II. A Crônica da gravitação, Editora Universidade Federal do Pará, 1991.
[4] Bassalo, J. M. F. Parte III. A Crônica da gravitação, Editora Universidade Federal do Pará, 1991.
[5] Rossi, P. La Rivoluzione Scientifica da Copenica a Newton, Torino, 1973.