AS ORIGENS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO E A CRISE DOS FUNDAMENTOS

Joaquim Francisco de Carvalho *
* Programa de Pós-Graduação em Energia da USP

"...nós percebemos objetos e entendemos conceitos.
Entendimento é outra forma de percepção..."
Kurt Gödel

Introdução

"No pequeno não existe *o menor***.** Existe sempre *um menor***,** pois o que existe não pode deixar de existir**,** por maior que seja o número de subdivisões"**.** Este sugestivo pensamento, formulado há cerca de 2.500 por Anaxágoras (Clazômenas, Jônia c. 500-428 a.C.), parece adequado para abrir um artigo de divulgação sobre aos origens do pensamento matemático, chegando até a hipótese do contínuo – apesar de que Anaxágoras tenha-se referido a *homeomerias,* termo cunhado por Aristóteles, para designar partículas materiais que se unem para formar cada corpo, mas que, diferentemente dos átomos, possuem as mesmas qualidades dos corpos que formam**.**

A ciência e a filosofia ocidentais descendem em linha direta dos gregos que, muitos séculos antes de nossa era, já procuravam estabelecer as bases do pensamento racional e científico. Os primeiros filósofos-cientistas viveram na antiga cidade-estado de Mileto, na costa jônica da Ásia Menor, por volta do século VI a.C**.** Naquela época, a vida na Grécia **-** em particular na Jônia **-** era praticamente livre da dominação clerical, ao contrário do que ocorria na Babilônia e no Egito, onde as castas sacerdotais exerciam grande poder político, o que confinava as atividades culturais nos templos e sujeitava a indagação intelectual a doutrinas teológicas, nas quais se apoiava toda a ordem social.

Tanto quanto nós, os grandes filósofos milésios, Tales (c. 625-545 a.C.), Anaximandro (c. 610-547 a.C.) e Anaximenes (c. 588-524 a.C.), queriam descobrir a estrutura da matéria e conhecer as origens universo. E, no ambiente propício da Jônia, eles puderam dedicar-se a especulações, ordenando a experiência e buscando compreeder a realidade. Nasceram assim a lógica, a matemática, a teoria atômica, a ética, a metafísica, a teologia, etc.

Alguns desses filósofos também foram estadistas e se interessaram pela cultura do mundo não-grego. Há indicações de que Tales conheceu os princípios da astronomia babilônica e os métodos fenícios de navegação e, segundo a tradição, foi ele que trouxe a geometria do Egito para a Grécia. Os fundamentos da geometria, para Tales, eram os conceitos intuitivos de ponto e reta, não especificados em postulados.

Não cabe aquí discorrer sobre a influência dos filósofos milésios sobre o pensamento grego. Lembremos apenas o sobredito Anaxágoras e ainda Pitágoras, nascido na ilha de

Samos, próxima à costa jônica (c. 570 a.C.) e morto em Crotona, no sul da Itália (c. 500 a.C.).

Nada ficou do que o próprio Pitágoras efetivamente escreveu, mas a confraria pitagórica deixou um curioso legado de ensinamentos que iam de dogmas religiosos a especulações matemáticas. Em particular, atribui-se a Pitágoras a descoberta de uma escala tonal que podia ser expressa em termos puramente numéricos, usando os primeiros quatro números inteiros. E tambem o célebre teorema que, originalmente, teria sido formulado e provado por ele, embora saiba-se que muitos séculos antes, agrimensores babilônios, caldeus e egípcios já o conhecessem.

Em fins do século VI a.C. a civilização grega passou a ser ameaçada pelos persas e a corrente filosófica foi-se deslocando para o ocidente, até encontrar novo centro em Eléia, colônia fundada por refugiados jônicos na Itália, ao sul de Nápoles. Aí vamos encontrar, por exemplo, Parmênides (c. 514-450 a.C.) e seu discípulo Zenão (c. 490-430 a.C.), que foi um dos primeiros filósofos a argumentar a partir de hipóteses e premissas formuladas por outros pensadores.

Zenão ficou muito conhecido pelo paradoxo do movimento, baseado na bissecção (Aquiles e a tartaruga), e pelos chamados paradoxos da pluralidade, que parecem antecipar certos dilemas da teoria dos conjuntos, como se vê pelas citações a seguir, que chegaram até nós através de Aristóteles (c. 384-322 a.C.), o fundador da lógica formal e um dos mais importantes filósofos da antiguidade:

- *Se as coisas são muitas, devem ser tantas quantas são, nem mais nem menos. E se elas são tantas quantas são, podem ser finitas (em quantidade).*
- *Se as coisas são muitas, as coisas existentes são infinitas, pois há sempre coisas entre as coisas existentes e, novamente, outras coisas entre estas outras. Sendo assim, as coisas existentes são infinitas (em quantidade).*

Para abreviar esta digressão, vamos acompanhar, desde a origem, um pensamento elaborado neste século por K. Gödel (1906-1978), mas que pode ser encontrado já na antigüidade, em Euclides, depois em Platão e, há cerca de dois séculos, em Kant.

Sabe-se pouco da vida de Euclides. Ele nasceu por volta de 295 a.C. e estudou provavelmente em Atenas. Mas passou a maior parte da vida em Alexandria, onde fundou a escola de matemática. Deve-se a Euclides a sistematização clara e rigorosa de toda a obra matemática de seus predecesores (geometria, teoria dos números irracionais, teoria das proporções). Os Elementos de Euclides são, provavelmente, o livro científico mais reproduzido e mais estudado da história.

Até meados do século passado, todas as pessoas cultas acreditavam que, começando por verdades evidentes (axiomas e postulados) e utilizando métodos de demonstração rigorosos, Euclides tinha chegado ao que é definitivamente certo a respeito do espaço – ou sobre objetos no espaço. Com Euclides, os fundamentos da geometria ainda eram intuitivos (ponto e reta), mas passaram a ser entendidos como objetos geométricos especificados em afirmações não demonstradas, ou seja, axiomas e postulados.

Platão (Atenas, c. 428-348 a.C.), o filósofo mais influente da escola ateniense, acreditava que existe uma verdade eterna, que pode ser descoberta pelo pensamento humano, como narra no diálogo Mênon, no qual um escravo, sem nenhum aprendizado prévio, respondendo a perguntas de Sócrates, consegue descobrir (ou "reencontrar") uma lei geométrica (um quadrado construido sobre a diagonal de um quadrado, tem o dobro da área de outro, construido sobre um dos lados). Se o escravo nunca tinha aprendido isto, argumenta Sócrates no diálogo de Platão, seu conhecimento só pode ter vindo de um reino de verdade absoluta, de onde é retirado todo o saber humano.

Cerca de 2.000 anos mais tarde, ou seja, em meados do século dezoito, Immanuel Kant (1724-1804) retomou esse pensamento para afirmar que existe um conhecimento eterno e independente (que ele chama *conhecimento sintético a priori*), do qual nossas intuições de espaço e tempo seriam exemplos concretos. Para Kant, toda a verdade sobre o espaço está na geometria de Euclides.

Até o século passado, a geometria de Euclides era vista como a única área do conhecimento humano acima de dúvidas. Outros ramos da própria matemática - e mesmo da física - só adquiriam significado através de sua fundamentação geométrica.

Esta conviccção da infalibilidade da geometria euclidiana foi um pouco abalada pela descoberta de outras geometrias, independentes dos postalados de Euclides, particularmente por J. Bolyai (1802-1860), B. Riemann (1826-1866) e N. Lobatchevski (1792-1856).

Grandes mudanças vieram com o desenvolvimento da análise matemática, que começava a ultrapassar a intuição geométrica. A idéia da falibilidade da geometria euclidiana causava a perda de certeza em qualquer outro campo das ciências em geral, aí incluida a própria matemática. Ganharam terreno, então, algumas correntes de pensamento empenhadas em reduzir os princípios da análise aos conceitos mais simples da aritmética.

O pioneiro dessa "aritmetização" da análise foi o matemático alemão K. Weierstrass (1815-1897) e o movimento experimentou grandes progressos com a chamada escola de Berlim, onde se destacavam matemáticos da importância de L. Kronecker (1823-1891), E. Kummer (1810-1893) e G. Frobenius (1849-1917), aos quais juntaram-se R. Dedekind (1831-1916) e G. Cantor (1845-1918).

A hipótese do contínuo

A mudança dos fundamentos da matemática, consubstanciada na passagem da geometria para a aritmética, colocou o problema da construção do ***contínuo linear***, isto é, do conjunto dos números reais, a partir dos números inteiros. Para isso, tanto Weierstrass, como Dedekind e Cantor propuzeram a utilização de *conjuntos infinitos* de números racionais.

Cantor tinha conjecturado que, à semelhança dos conjuntos finitos, tambem faz sentido falar em "número de elementos" (cardinalidade) de conjuntos infinitos. Mas esta noção só teria interesse se pudesse ser demonstrado que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade.

De fato, um conjunto é infinito se, e somente se, for equivalente a um de seus subconjuntos. E Cantor provou, com seu célebre método da diagonal, que o conjunto dos números naturais não é equivalente ao conjunto dos pontos de um segmento de reta. Portanto existem pelo menos dois tipos de infinito:

- O infinito correspondente à cardinalidade do conjunto dos números naturais ($\aleph_0$)
- O infinito correspondente à cardinalidade do conjunto dos pontos de um segmento de reta, ou cardinalidade do contínuo (**c**). Qualquer conjunto em R, R^2, R^3 ou R^n (segmentos de reta, figuras planas, figuras a três dimensões ou porções delimitadas de espaços a n dimensões) tambem tem a cardinalidade do contínuo.

Em seguida vêm os conjuntos das partes de um conjunto dado $\wp(A)$. Sendo **a** a cardinalidade do conjunto A, a cardinalidade de $\wp(A)$ será $2^{\mathbf{a}}$. Cantor monstrou que estas cardinalidades são diferentes. E, em particular, provou que a cardinalidade do conjunto das partes do conjunto dos números naturais, $\wp(N)$, é equivalente à cardinalidade do contínuo, isto é:

$$2^{\aleph_0} = \square$$

Coloca-se agora a pergunta: existe algum conjunto infinito com cardinalidade entre $\aleph_0$ e □ ? - Com outras palavras, existiria, num segmento de reta, um conjunto infinito de pontos, que não seja equivalente ao segmento todo, nem ao conjunto dos números naturais?

Cantor não conseguiu responder a essa pergunta e conjecturou (mas nunca demonstrou) que tal conjunto não existe. Esta conjectura de Cantor recebeu o nome de *hipótese do contínuo* e, no campo dos fundamentos da matemática, figurou durante muitos anos entre os grandes problemas pendentes.

A crise dos fundamentos

Utilizando operações da teoria dos conjuntos, Gottlob Frege (1848-1925) mostrou que os números naturais podiam ser construidos a partir do conjunto vazio, ou seja, a partir de nada. Isto permitia que a aritmética (até então a estrutura fundamental), cedesse lugar à teoria dos conjuntos, como base para a construção de toda a matemática.

A relação de inclusão da teoria dos conjuntos ($A \supseteq B$) pode sempre ser associada à relação de implicação ($A \Rightarrow B$) da lógica (corpo de leis fundamentais do raciocínio).

A partir daí, o chamado *programa dos lógicos*, desenvolvido principalmente por B. Russell (1872-1970) e A.N. Whitehead (1861-1947), procurava demostrar que a idéia de conjunto (coleção arbitrária de objetos distintos) poderia ser tomada como ponto de partida para a construção de toda a matemática. Ou seja, como a matemática é apenas um desenvolvimento das leis da lógica, todo seu estudo poderia ser reduzido à teoria dos conjuntos.

Assinale-se que, até cerca de 1870, entendia-se por conjunto uma coleção de objetos matemáticos, como números, figuras geométricas, funções etc. Depois de 1930, os conjuntos voltaram a ser entendidos dessa forma.

Entre 1870 e 1930, a teoria dos conjuntos transformou-se em arena de disputas entre matemáticos e filósofos de diversas correntes. O ponto culminante dessas disputas foi a descoberta, por Bertrand Russell, de contradições, eufemísticamente designadas pelo termo *antinomias*, dentre as quais a mais famosa ficou conhecida como o Paradoxo de Russell, que resume-se em que, pela teoria de Cantor, pode-se construir o conjunto de todos os conjuntos que não contenham a sí próprios como elementos e, então, perguntar se este conjunto contem a sí próprio como elemento. A resposta é forçosamente contraditória.

Contradições desse tipo caracterizaram o início do que veio a se chamar a *crise dos fundamentos*. Crise que, de certo modo, abalou as convicções de muitos matemáticos, até então cheios de certezas sobre os fundamentos da ciência.

No contexto da crise dos fundamentos, ganharam corpo três correntes de pensamento matemático: o platonismo, o formalismo e o construtivismo (ou intuicionismo).

Os **platonistas** consideram que a existência de objetos matemáticos é um fato objetivo, independente de nosso conhecimento sobre eles. Tais objetos existem fora do espaço e do tempo, e são imutáveis. Qualquer pergunta sobre um objeto matemático já tem uma resposta bem definida, quer consigamos descobrí-la ou não.

Para os platonistas, os matemáticos são, portanto, pesquisadores empíricos, que não podem inventar nada, porque já existe tudo. Seriam como os geólogos, que se dedicam a procurar e explorar depósitos minerais, que já existem no sub-solo.

Em 1937, o platonista Kurt Gödel demonstrou que a teoria formal dos conjuntos não é suficiente para provar a validade da hipótese do contínuo. E em 1963 Paul Cohen demostrou que também não se pode provar que a hipótese do contínuo não pode ser demonstrada. Isto significa, para os platonistas, que os axiomas de que dispomos constituem um modelo incompleto dos números reais. Portanto a hipótese do contínuo é verdadeira ou falsa, mas não compreendemos suficientemente bem o conjunto dos reais, para encontrar a resposta.

Para os **formalistas** não existem objetos matemáticos. A matemática resume-se em axiomas, demonstrações e teoremas, isto é, existem regras, que dão origem a fórmulas, que podem ser aplicadas a problemas físicos, mas sua verdade ou falsidade relaciona-se a interpretações que não têm nenhum valor para a matemática pura. Para os formalistas a interpretação platonista não tem significado, simplesmente porque não existe nenhum conjunto infinito de números reais, a não ser o que criamos, a partir de axiomas que podemos modificar a qualquer momento.

Opostos a ambos estão os **construtivistas** (intuicionistas), para os quais *não existem* verdades matemáticas *fora* do pensamento humano, isto é, a matemática é apenas o que pode ser obtido por construção finita. Nenhum conjunto infinito, inclusive o dos reais, pode ser obtido dessa maneira. Portanto, para o construtivista, a hipótese do contínuo não tem sentido. Dois dos principais construtivistas foram Luitzen Brouwer (1881-1966) e Hermann Weyl (1885-1955).

Para Brouwer, o *principium tertii exclusi*, excepto em casos especiais, não pode servir de instrumento para a descoberta de novas verdades matemáticas. Em suas palavras, "acreditar-se na validade universal do *principium tertii exclusi* é apenas um fenômeno ligado à história da civilização, da mesma maneira que, antigamente, acreditava-se que o número π era racional, ou que o firmamento girava à volta da terra".

Em resumo, a *rational* de Brouwer segue as seguintes linhas: se cada aplicação do *principium tertii exclusi* fosse acompanhada de algum procedimento matemático efetivo, isto significaria que cada afirmação matemática (isto é, a atribuição de uma propriedade a uma entidade matemática) poderia ser *julgada*, o que vale dizer, *provada* ou *reduzida ao absurdo*.

De fato, toda construção de natureza finita, limitada, num sistema matemático, só pode ser tentada por um número finito de maneiras, e cada tentativa revela-se bem ou mal sucedida, num número finito de passos.

Conclue-se pois que cada assertiva da possibilidade de uma construção de natureza limitada, finita, num sistema matemático finito, pode ser julgada. Portanto, nessas circunstâncias, as aplicações do *principium tertii exclusi* são legítimas.

Consideremos agora um sistema infinito. Podemos perguntar, por exemplo, se existe um número natural n tal que, na expansão decimal de π, os dígitos que vêm em enésimo, enésimo-primeiro, enésimo-segundo, etc. até enésimo-nono lugar, ou seja, os nº, $(n+1)$º, (n+2)º, ...e $(n+9)$º dígitos, formem a seqüência 0123456789.

Esta pergunta concerne uma afirmação que, até agora, não pode ser julgada. Portanto, não pode ser respondida nem pela afirmativa nem pela negativa. Mas então, do ponto de vista construtivista (pelo qual os sistemas matemáticos são apenas os que podem ser obtidos por construção finita), não tem sentido a afirmação de que, na expansão decimal de π ocorre (ou não ocorre) a seqüência 0123456789.

Neste caso, a propriedade atribuida ao natural n é um exemplo de propriedade transitória (*fleeing property*) que, em última análise, viola o *principium tertii exclusi*.

Com efeito, seja P a afirmação "na expansão decimal de π aparece, eventualmente, a seqüência 0123456789", e seja P* a afirmação "na expansão decimal de π nunca aparece a seqüência 0123456789". Será verdadeira a afirmação P (ou P*) ? – Por outras palavras: P é verdadeiro (ou falso) ? – O *principium tertii exclusi* requer uma resposta afirmativa pois, por ele, todas afirmações são verdadeiras ou falsas. Mas o construtivista argumenta que tal princípio não se aplica ao caso, pois, para ele, a expansão de π *não existe*, como um objeto matemático completo.

Finalmente, para Weyl, "O conceito de número real como um número apenas aproximado, mas cujo grau de aproximação pode ser extendido além de qualquer limite, pode ser formulado simplesmente deste modo: um número real é uma seqüência infinita de *intervalos decimais*, de tal forma que cada intervalo desta série contém em sí mesmo o intervalo subseqüente".

Desse modo, com uma seqüência infinita de intervalos enumeráveis, H. Weyl retoma as implicações de um pensamento formulado 2.500 anos antes, por Anaxágoras. . .

Bibliografia

1. Lourenço, M. (org.) - *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* - Fundação C. Gulbenkian, 1979.
2. Davis, P. and Hersch, R. - *The Mathematical Experience* - Birkhäuser, 1981.
3. Dieudoné, J. - *Pour l´honneur de l´esprit humain* - Hachette (col. Pluriel), 1987.
4. Halmos, P. - *Naive Set Theory* - Van Nostrand, 1960.
5. Van Dalen, D. (ed.), *Brower´s Cambridge Lectures on Intuitionism* - Cambridge U. Press, 1981.
6. Weyl, H. *The Continuum - A Critical Exam. of the Fondation of Analisys* - The T. Jefferson U. Press, 1987.