Fluxos Normalizados de Ricci em Superfícies de Riemann Fechadas e o Operador de Dirac na Presença de um Potencial Abelian

Luiz C.L. Botelho

Departamento de Matemática Aplicada,

Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense,

24220-140, Niterói, Rio de Janeiro, Brazil

e-mail: botelho.luiz@ig.com.br

Sumário: Nesta nota, demonstramos uma propriedade máximal para o determinante do Operador de Dirac, na presença de potencial vetorial abelian $U(1)$ e definido em uma Superfície de Riemann Compacta $\sum$, em relação à ação de fluxo de Ricci normalizado (Teorema 1).

– **Mathematics Subject Classifications (2000)**, 58152, 53C44

– **Palavras Chaves:** Fluxo de Ricci, determinante do Operador de Dirac, Superfície de Riemann

Um interessante resultado na Geometria Riemaniana das Superfícies de Riemann é aquele relacionado ao fato de que existe uma noção de fluxo sobre esta superfície $\sum$ ([1]) (quando $g \geq 1$, aqui g denota o Genus da mesma) e em relação ao qual a métrica converge assintóticamente para a métrica de curvatura constante, representativa do Espaço de módulos (Teichmüller space). A equação governando a dinâmica de fluxo para uma dada configuração métrica $h_{\mu\nu}(x)$ é a seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\mu\nu} = (R_0 - R) h_{\mu\nu} \tag{1}$$

onde R é o escalar de curvatura e R_0 o seu valor médio.

Um importante resultado nesta matéria é o interessante Teorema de Osgood-Philips-Sarnak, o qual mostra-nos que na classe das métrica com estrutura conformal fixa, o determinante do Operador de Laplace toma um valor maximal na métrica de curvatura constante ([2]).

Nesta nota, generalizamos tal resultado para um Operador de Dirac (com a estrutura de spin fixa) ([3]) na presença de uma conexão abeliana. Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 1. *O determinante de um Operador de Dirac, na presença de uma conexão abeliana, definido em uma Superfície de Riemman Compacta cresce monótonamente sobre a ação do fluxo de Ricci.*

Demonstração: Consideremos o operador de Dirac, associado a um campo (complexo $U(1)$) e de estrutura (v^i, φ^i) de spin fixada na presença de uma conexão $U(1)-A$. Em notação Tensorial ([3]) $\mu = 1, 2$

$$\not{D}(A, \hat{h}) = i\gamma^a \hat{e}_a^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{8} w_{\mu_{ab}}(\hat{e})\varepsilon^{ab}\gamma_5 + eA_\mu). \tag{2}$$

As matrizes $\gamma^\mu = \hat{e}_a^\mu \gamma_a$ são as matrizes de Dirac associadas a estrutura métrica $\hat{e}_a^\mu \hat{e}_a^\nu = \hat{h}^{\mu\nu}$ em $\sum_g$ (Superfície de Riemman Compacta de Genus g). Note que $\hat{h}^{\mu\nu}$ pode ser sempre escrita na forma canônica

$$\hat{h}^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho} \tilde{h}^{\mu\nu}(\zeta), \tag{3}$$

onde $\tilde{h}^{\mu\nu}$ é o elemento representativo do Espaço de módulos de $\sum$, juntamente com a decomposição de Hodge da conexão abeliana externa $U(1)$ (primeira e segunda referência em [3])

$$A_\mu = -\frac{\varepsilon^{\mu\nu}}{\sqrt{\hat{h}}} \partial_\mu \phi + A_\mu^H, \tag{4}$$

onde

$$\nabla^\mu (A_\mu - A_\mu^H) \equiv 0. \tag{5}$$

É útil observar que podemos escrever o termo responsável pela topologia de $\sum$ na conexão de Hodge A_μ^H, através das diferenciais abelianas (e suas respectivas complexas conjugadas) (veja a segunda e a terceira referências em [3] para detalhes)

$$A_\mu^H = 2\pi \sum_{\ell=1}^{g} (p_\ell \alpha_\mu^\ell + r_\ell \beta_\mu^\ell) \tag{6}$$

$$\alpha_\mu^i = -\overline{\Omega}_{ik} (\Omega - \overline{\Omega})_{ks}^{-1} w_\mu^j + c.c \tag{7}$$

$$\beta_\mu^i = (\Omega - \overline{\Omega})_{ij}^{-1} w_\mu^j + c.c. \tag{8}$$

A Matriz Período Ω é definida usualmente pelas relações homológicas ([3])

$$\int_{a^j} \alpha^i = \delta_{ij}; \quad \int_{b^i} \beta^j = \Omega_{ij}, \tag{9}$$

aqui a^i e b^i são os ciclos homológicos canônicos de $\sum$.

Consideremos, agora, a variação do determinante de Dirac $\det(\not{D}\, \not{D}^*) = \det(\not{D})$ em relação a uma variação infinitesimal da métrica de uma classe conformal fixa ($\tilde{h}^{\mu\nu}(\zeta)$ está fixo, veja eq.(3)) e estrutura de spin determinada (ϕ^i, v^i).

Este é um resultado bem conhecido na literatura ([3], [4]). Temos, então que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} log \left\{ \frac{(\not{d}(A, \hat{h}))}{\text{area}(\sum) \det(\not{D}(A = 0, \tilde{h})} \right\} \\ &\frac{e^2}{\pi} \int_\Sigma dz \wedge d\overline{z} [\tilde{h}^{z\bar{z}} (\partial_z \phi \partial_{\overline{z}} \phi)](z, \overline{z}) \\ &\quad + \frac{1}{12\pi} \int_\Sigma [(\log \rho)_t (\log \rho)_{z\overline{z}}] (\tilde{h}^{z\overline{z}} dz \wedge d\overline{z}) \end{aligned} \tag{10}$$

variação esta quando calculada para o fluxo de Ricci normalizado $\left(\frac{\partial}{\partial t} \log \rho = R_0 - R;\right.$ aqui $\left. R = -\frac{1}{\rho} \partial^2_{z\bar{z}} (\log \rho);\ R_0 = \frac{2\pi(2-2g)}{\text{area}(\sum)} \right)$, produz a positividade de eq.(10)

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \left\{ \frac{\det(\not{D})(A, \hat{h})}{\text{area}(\sum) \det(\not{D}(A = 0, \tilde{h}))} \right\} \geq 0 \tag{11}$$

Note que o anulamento de eq.(11) somente é obtido através das métricas de curvatura constante; equivalente ao valor assintótico $t \to \infty$ na eq.(10)

$$\int_{\Sigma} (R_0 - R) R \cdot \sqrt{h}\, dz \wedge d\overline{z}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{area}(\sum)} \left\{ \int_{\Sigma} R \cdot \sqrt{h}\, dz \wedge d\overline{z})^2 - \int_{\sum \times \sum} R^2 \sqrt{h}\sqrt{h} \right\} = 0, \tag{12}$$

concluindo portanto o nosso resultado, já que para $t \to \infty$ toda métrica é atraida para a métrica de curvatura constante sob a ação do fluxo de Ricci (normalizado $\int_{\sum} \sqrt{\hat{h}} dz \wedge d\overline{z} = A\mathrm{area}(\sum) =$ fixo). Um estudo completo, incluindo o caso de existência de conexões externas não-abelianas será apresentado em outro lugar.

Referências

[1] Hamilton, R.S.: The Ricci fluxo on surfaces, Contemp. Math. 71 (1988), 237–262.

[2] Osgood, B.; Phillips, R.; and Sarnak, P.: Extremals of determinants of Laplacians, J. Funct. Anal. 80, (1988), 148–211.

Luiz C.L. Botelho and M.A.R. Monteiro: Fermionic Determinant for Massless QCD, Phys. Rev. 30D, 2242–2243, (1984).

A. Kokotov and D. Korotkin: Normalized Ricci Flow on Riemann Surfaces and Determinant of Laplacian. Letters in Math. Phys., 71, 241–242, (2005).

[3] Luiz C.L. Botelho: Path Integral Bosonization for the thirring Model on a Riemman Surface, Euro Physics Letters, vol 11, 313–318, (1990).

Alvarez-Guamé L.; Moore G. and Vafa G.: Commun. Math. Phys. 106 (1980), 1–35.

M.F. Atiah and I.M. Singer: “Dirac operators coupled to vector potentials”, Proc. Math. Acad. Sci., USA, 81, 2597–2600, (1984).

[4] V.N. Romanov and A.S. Schwarz: “Anomalies and Elliptic Operators”, Teoreticheskaya; Matematicheskaya Fizika, vol 41, No. 2, 190–204, (1979).

Mikio Nakahara: "Geometry, Topology and Physics", Graduate Student Series in Physics. IOP Publishing, London, (1990).

Luiz C.L. Botelho: "Covariant Functional Diffusion Equation for Polyakov's Bosonic String, Phys. Rev. D40, 660–665, (1989).

D'Hoker and D. Phong: The geometry of string perturbation theory, Rev. Mod. Phys. 60, 917, (1988).