

# Das origens do método dos fótons equivalentes

*F. Caruso*

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rua Dr. Xavier Sigaud 150, 22290-180, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

## Resumo:

O Método de Weizsäcker-Williams – conhecido também como “aproximação dos fótons virtuais” ou “método dos fótons equivalentes” – é discutido em detalhes começando por mostrar suas origens: em especial, as contribuições de N. Bohr e E. Fermi. Segue-se a derivação semi-clássica do método de W.W., a discussão de seus limites de aplicação e a determinação do espectro dos fótons equivalentes. Apresentam-se, a seguir, algumas das primeiras aplicações do método em questão. Concluindo, faz-se um resumo de como foram feitas essas generalizações, mostrando algumas de suas aplicações.

## 1. Introdução

Neste trabalho, procuraremos dar uma idéia do que o método semi-clássico desenvolvido por C.F. von Weizsäcker e E.J. Williams, no período de 1933-35, com origem no estudo das interações de partículas carregadas com a matéria. Este é conhecido como *Método de Weizsäcker-Williams* (W.W.), *aproximação dos fótons equivalentes* ou ainda *método dos quanta virtuais*. Nossa principal motivação para abordar esse assunto deve-se ao fato de que, passado muito tempo, o método de W.W. ainda é utilizado.

Do eletromagnetismo clássico, sabemos que existe uma semelhança entre os campos elétrico e magnético de uma partícula carregada, que se move a uma velocidade próxima à da luz, e os campos de um pulso de radiação, como veremos mais adiante. É justamente esta semelhança que é explorada no método de W.W.

Podemos dizer, resumidamente, que o método de W.W. consiste em *substituir* a partícula que incide sobre um alvo por um pulso de radiação equivalente, o qual pode ser visto como um *conjunto de fótons virtuais*. Isto nos permite determinar o espectro de radiação equivalente e, a partir daí, podemos calcular os efeitos da interação do alvo com os fótons virtuais. Deste modo, fica determinada a relação entre processos de colisão de partículas carregadas e os efeitos de radiação. Em outras palavras, dado um certo processo  $A$ , devido à interação eletromagnética de uma partícula com um alvo, podemos obter a seção de choque  $\sigma_A$  para o processo a partir da seção de choque de fotoprodução por fótons livres,  $\sigma_\gamma$ , via método de W.W. O procedimento é simples: uma vez conhecida a seção de choque de fotoprodução, basta integrá-la sobre todo o espectro de fótons equivalentes.

Já o procedimento para determinarmos este espectro é resumidamente o seguinte: (i) achamos a transformada de Fourier de cada componente do campo eletromagnético criado pela partícula incidente; (ii) determinamos o espectro de frequência (energia por unidade de área, por intervalo de frequência) do pulso equivalente; (iii) integramos o espectro de frequência em todos os parâmetros de impactos possíveis, obtendo, assim, a distribuição de energia por intervalo de frequência e (iv) determinamos o número de fótons equivalentes.<sup>1</sup>

Inicialmente, procuramos apresentar, na Seção 2, as origens históricas do método de W.W., comentando, em especial, as contribuições de Niels Bohr e de Enrico Fermi para o desenvolvimento do método em questão. Faremos, ainda nesta seção, uma comparação com os primeiros resultados obtidos usando-se a Mecânica Quântica.

Na Seção 3, segue-se uma derivação semi-clássica do método de W.W., na qual procuramos descrever com detalhes o método e seus limites de aplicação, após o que determinamos o espectro de radiação equivalente. Em seguida, discutiremos algumas relações gerais entre fenômenos de colisão entre partículas carregadas e efeitos de radiação, que servirão de base para as aplicações que se seguirão.

Na Seção 4, apresentamos algumas aplicações do método de W.W. Além daquelas discutidas pelos autores do método, apresentamos outra que, em última análise, acabaram por levar outros autores a fazer uma generalização deste método e a derivar a fórmula de W.W. a partir da Teoria de Campos.

Na Seção 5, apresentamos, resumidamente, como foram feitas estas generalizações, sem entrarmos no detalhe de suas derivações, pois isto fugiria ao escopo deste artigo de revisão. Tomamos o cuidado de, sempre que possível, citar as referências originais.

## 2. As Origens

### 2.1 Tratamento clássico da interação de partículas carregadas com a matéria

Em 1913, Niels Bohr [1] publicou um artigo no qual discute o decréscimo de velocidade dos raios catódicos  $\alpha$  e  $\beta$  quando estes penetram na matéria. Devemos ter em mente que o modelo atômico válido na época era o de Rutherford e, portanto, neste parágrafo, nossa intenção é apenas comentar em linhas gerais um trabalho que pode ser considerado em retrospectiva como a origem do método dos ftons equivalentes.

A primeira teoria para explicar o fenômeno do decréscimo de velocidade dos raios (ou partículas)  $\alpha$  e  $\beta$  ao passarem pela matéria foi elaborada por J.J. Thomson, na qual ele supôs que a perda de velocidade destas partículas devia-se a choques com elétrons contidos nos átomos da matéria. Thomson admitiu também que os elétrons de um átomo só iriam interferir na velocidade da partícula incidente se a distância entre esta e os elétrons fosse da mesma ordem de grandeza da distância  $d$  entre os elétrons atômicos. Este limite baseia-se na hipótese de que para distâncias  $\ell > d$  haveria uma compensação dos efeitos dos diferentes elétrons sobre a partícula incidente.

Outra teoria para explicar a absorção e o espalhamento de partículas  $\alpha$  foi proposta por Darwin,<sup>2</sup> que supôs que as forças atuantes sobre os elétrons devidas aos átomos poderiam ser desprezadas durante colisões muito próximas e violentas entre o elétron e a partícula  $\alpha$ ; colisões

---

<sup>1</sup>Obviamente, este procedimento deve ser coerente com os limites de validade do método aproximativo de W.W., que serão discutidos com detalhes no texto.

<sup>2</sup>*Philosophical Magazine* **23** (1912) 907.

estas que ocorrem quando a partícula incidente passa pelo átomo ao qual o elétron pertence, o que corresponde ao limite efetivo da teoria de Thomson. Por outro lado, a velocidade da partícula  $\alpha$  não seria alterada se ela não passasse pela região atômica. Cabe notar que com esta teoria Darwin obteve valores incorretos para o diâmetro atômico, principalmente para átomos leves e para os pesados.

Bohr discordou do fato de Darwin tomar a superfície dos átomos como sendo o limite para o efeito dos elétrons sobre as partículas e sugeriu [1] que um limite para este efeito dos elétrons sobre a velocidade das partículas que incidem sobre um alvo deve ser obtido levando-se em consideração as forças que os mantêm em suas posições nos átomos. Sob a influência destas forças, os elétrons iriam oscilar quando perturbados por forças externas. De fato, seja  $T$  o tempo de vibração e  $T_b$  o tempo de colisão, *i.e.*, o tempo gasto pela partícula incidente para percorrer uma distância da ordem de grandeza do parâmetro de impacto  $b$  da colisão. Como a interação entre o elétron e a partícula incidente é coulombiana, a intensidade da interação entre ambos decresce rapidamente com o aumento da distância entre eles. Assim, o efeito do elétron será muito pequeno, se o parâmetro de impacto for suficientemente grande de modo a termos  $T_b \gg T$  (o que define uma colisão distante). Portanto, se ao invés de considerarmos os elétrons livres nos átomos, levamos em conta forças que tendem a mantê-los em suas posições, estas irão alterar significativamente o movimento dos elétrons, durante a colisão, somente quando  $T_b \simeq T$ . Conseqüentemente, a perda de energia da partícula incidente também só será alterada significativamente quando  $T_b \simeq T$ .

Além disso, nesse artigo, Bohr sugere a existência de uma analogia entre a teoria do decréscimo de velocidade de partículas carregadas ao atravessarem a matéria e a teoria eletromagnética da dispersão. Em outras palavras, *deve existir uma analogia entre a passagem de partículas carregadas pela matéria e a passagem de um pulso ou um trem de ondas por um meio dispersivo* (caracterizado por sua constante dielétrica ser dependente da frequência dos campos). Analisemos um pouco esta analogia. Devido à linearidade das equações de Maxwell, podemos obter uma nova solução das mesmas a partir de uma superposição linear de soluções de diferentes frequências. Num meio dispersivo, a velocidade de fase de cada componente da onda de frequência diferente não é a mesma; isto implica que componentes do pulso de frequências (ou comprimento de onda) diferentes se deslocam, através de um meio dispersivo, com velocidades diferentes. Conseqüentemente, existe uma tendência para que a forma do pulso não seja mantida durante a sua passagem pelo meio. Por outro lado, partículas que possuem diferentes velocidades interagem de forma diferente com os elétrons da matéria, como já foi visto. Para levarmos em conta a possibilidade de dispersão, devemos tomar a frequência  $\omega$  como função do comprimento de onda (mais comumente do número de onda  $k$ ). Já nos fenômenos de choque, o tempo de colisão é função da velocidade e do parâmetro de impacto. Então, a analogia à qual Bohr se refere não é outra coisa senão a analogia entre as expressões  $\omega = \omega(k)$  do fenômeno de dispersão, e  $\omega_b = \omega_b(v)$  do fenômeno de colisão, onde definimos  $\omega_b = 2\pi/T_b$  como a frequência de colisão.

Para introduzir o efeito produzido pelas forças que atuam sobre os elétrons devido aos átomos, Bohr introduziu a seguinte simplificação: admitiu que a frequência de vibração dos elétrons é tão pequena de modo que  $T \gg T_b$ , para colisões onde  $b \simeq \lambda$ .<sup>3</sup> Então, só devemos considerar a influência das forças em questão, para colisões nas quais  $b$  é grande comparado com  $\lambda$ , pois já vimos que a perda de energia da partícula incidente só é alterada significativamente quando

<sup>3</sup>A quantidade

$$\lambda \equiv \frac{eq_{in}(M+m)}{v^2mM} = \frac{eq_{in}}{v^2\mu}$$

é um parâmetro introduzido convenientemente, com dimensão de comprimento que, no caso de forças repulsivas entre as partículas que colidem, representa a distância de máxima aproximação entre elas numa colisão frontal ( $b = 0$ );  $q_{in}$ ,  $e$ ,  $M$  e  $m$  são, respectivamente, as cargas e as massas das partículas incidente e do elétron e  $\mu = mM/(m+M)$ , a massa reduzida do sistema.

$T_b \simeq T$ . Logo, os cálculos envolvidos aqui são bastante simplificados, pois o deslocamento do elétron é muito pequeno em comparação a  $b$  e, portanto, pode ser desprezado durante o tempo de passagem do projétil. Com essas hipóteses, podemos considerar a trajetória da partícula incidente como aproximadamente uma linha reta, representada por  $\overline{AB}$ , na figura a seguir.

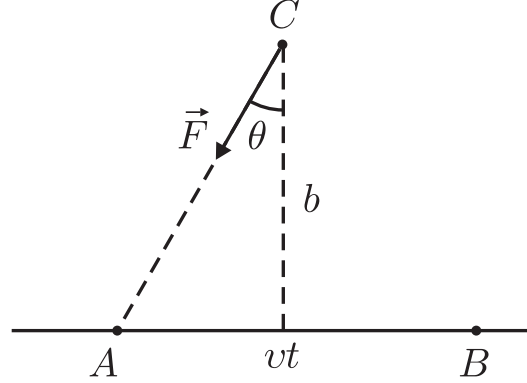


Figura 1

Decompondo o movimento do elétron em duas direções, uma perpendicular e outra paralela à trajetória incidente, Bohr obteve para a força atuante sobre o elétron na direção  $CB$ ,

$$F_{\perp} = \frac{eq_{in}}{AC^2} \cos \theta = \frac{eq_{in}\overline{BC}}{AC^3} = \frac{eq_{in}b}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}} \equiv m\phi_{\perp}(t)$$

Assim, Bohr chegou à seguinte equação para o movimento do elétron na direção perpendicular à trajetória da partícula incidente:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \phi_{\perp}(t)$$

onde o ponto denota derivada temporal e  $\omega$  é a frequência correspondente às forças em questão.<sup>4</sup>

De modo análogo, para a direção paralela à trajetória da partícula, temos

$$F_{\parallel} = \frac{eq_{in}\overline{AB}}{AC^3} = \frac{eq_{in}vt}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}} \equiv m\phi_{\parallel}(t)$$

Com estas equações ele vai obter a energia total transferida para o elétron durante a colisão, que será a soma das energias correspondentes a estes dois movimentos. Deste modo, a expressão para a taxa de variação da energia da partícula que passa através da matéria,  $-dT/dx$ , para átomos de um elétron, obtida por Bohr,<sup>5</sup> é:

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{4\pi N e^2 q_{in}^2}{mv^2} \log \frac{gmv^3}{2\pi q_{in}e\omega}$$

<sup>4</sup>A solução para esta equação sujeita às condições  $x = 0$  e  $\dot{x} = 0$  para  $t = -\infty$  é [J.W.S. Rayleigh: *The Theory of Sound*, vol. 1, p. 74, New York: Dover (1945)]:

$$x = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \text{sen } \omega(t-t') \phi_{\perp}(t') dt'$$

e

$$\dot{x} = \int_{-\infty}^t \text{cos } \omega(t-t') \phi_{\perp}(t') dt'$$

<sup>5</sup>Na realidade, a fórmula obtida por Bohr [1] abrange o caso geral de  $n$  elétrons com diferentes frequências, mas vamos nos interessar aqui apenas por átomos de 1 elétron.

onde  $g = 1.123$ ,  $m$  e  $e$  são, respectivamente, a massa e a carga do elétron e  $q_{in}$  é a carga da partícula que se move com velocidade  $v$ ;  $N$  é a densidade volumétrica de átomos.

Recapitulando, para chegar à expressão anterior, Bohr supôs que:

- (i) A frequência  $\omega$  é pequena comparada com  $v/\lambda$ ;
- (ii) A velocidade  $u$  do elétron em sua órbita não perturbada é pequena comparada com a velocidade  $v$  da partícula incidente;
- (iii) As dimensões lineares  $\ell$  das órbitas são pequenas comparadas com  $v/\omega$ ; deste modo, para (ii) e (iii) serem satisfeitas simultaneamente devemos ter  $u = \omega\ell$ ;
- (iv) O deslocamento dos elétrons causado pelas forças devidas à partícula incidente é pequeno em relação às dimensões da órbita não perturbada para as colisões onde levamos em conta as forças devidas ao átomo. Em outras palavras, processos como o de ionização, por exemplo, nunca ocorrerão em tais colisões.

Voltando às equações

$$F_{\perp} = \frac{eq_{in}b}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}} \quad (1)$$

$$F_{\parallel} = \frac{eq_{in}vt}{(v^2t^2 + b^2)^{3/2}}$$

vemos que elas são os limites das equações bem conhecidas para as componentes da força de natureza elétrica sobre uma carga quando  $\gamma = 1$ . Antes de revermos como Bohr tratou o efeito relativístico, gostaríamos de transcrever, a título de curiosidade, a conclusão de seu artigo de 1913:

*Adopting Prof. Rutherford's theory of the constitution of atoms, it seems that it can be concluded with great certainty, from the absorption of  $\alpha$ -rays, that a hydrogen atom contains only 1 electron outside the positively charged nucleus, and that helium atom only contains 2 electrons outside the nucleus (...).*

O limite  $v \rightarrow c$  foi discutido pelo próprio Bohr em um artigo datado de 1915 [2]. Para  $v \simeq c$ , o cálculo da energia transferida torna-se complicado no caso geral. Porém, baseado em dados experimentais, Bohr concluiu que o valor da energia perdida pelas partículas  $\beta$ , ao passarem através da matéria, vai depender somente das colisões nas quais a energia transferida é muito pequena comparada com a energia total da partícula  $\beta$ , *i.e.*, colisões nas quais  $\lambda \ll b$ , o que introduz muitas simplificações. Utilizando a expressão da força elétrica exercida sobre um elétron em repouso por uma partícula de carga  $q_{in}$  e velocidade uniforme  $v = \beta c$ , ele obteve:

$$F_{\perp} = \frac{eq_{in}\gamma b}{(b^2 + \gamma^2v^2t^2)^{3/2}} \quad (2)$$

$$F_{\parallel} = \frac{eq_{in}\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2v^2t^2)^{3/2}}$$

Podemos ver que a força em qualquer instante pode ser calculada utilizando a eletrostática se substituirmos  $v \rightarrow \gamma v$  e, ao calcularmos a componente perpendicular à trajetória, substituirmos a carga  $q_{in} \rightarrow \gamma q_{in}$ , embora deixando-a inalterada na componente paralela.

Esperamos que com o que foi visto até aqui o leitor concorde em considerar esses dois artigos de Bohr pelo menos como uma semente importante para o futuro desenvolvimento do método

de W.W. Outro artigo importante para o desenvolvimento deste método foi escrito, em 1924, por Fermi [3]. A idéia fundamental contida neste artigo – que descreve a teoria da dissipação de energia por partículas em movimento – é que a perturbação de um átomo em colisões distantes,<sup>6</sup> sob a ação de uma força perturbativa constante sobre o átomo, é obtida corretamente decompondo-se esta em suas componentes de Fourier e admitindo-se que cada componente se comporta como radiação de frequência igual à da componente de Fourier. Deixaremos para discutir as relações entre o método em questão e os trabalhos de N. Bohr e E. Fermi na Seção 3, quando ficará mais claro porque nos referimos a estes trabalhos como a origem do método de W.W.

## 2.2. Primeiros tratamentos quânticos da interação de partículas carregadas com a matéria

Em 1927, Gaunt [4] calculou a potência de frenagem,  $-dT/dx$ , do átomo de hidrogênio para partículas  $\alpha$  já utilizando a Mecânica Quântica. O resultado confirma aquele obtido classicamente por Bohr. Nesse artigo, Gaunt não considera que a partícula  $\alpha$  seja parte do sistema dinâmico, nem a substitui por ondas de De Broglie, representando-a como uma carga pontual movendo-se com velocidade constante em uma linha reta, constituindo-se, assim, no centro de um campo coulombiano. O parâmetro de impacto (em relação ao núcleo considerado fixo) é grande comparado com as dimensões atômicas. Logo, o efeito sobre o átomo pode ser calculado usando-se a teoria de perturbação de segunda ordem, pois a de primeira ordem dá zero como resultado.

Já sabemos que quando um feixe de partículas carregadas atravessa uma lâmina de matéria, a energia de cada partícula é reduzida. No entanto, a perda de energia não é a mesma para todas as partículas e, portanto, partículas que incidem sobre a lâmina com a mesma energia emergem com energias diferentes. A dispersão da energia causada pela lâmina é conhecida como *straggling*. A teoria para o *straggling* de partículas  $\alpha$  foi desenvolvida por Bohr [2] que também mostrou que sua teoria não era aplicável às partículas  $\beta$ . Em 1929, Williams [5] publicou um trabalho no qual desenvolve uma teoria tentando explicar esse fenômeno e compara seus resultados com os obtidos experimentalmente. Dando continuidade a esse trabalho, Williams e Terroux [6], em 1930, escrevem um artigo no qual investigam a passagem de partículas  $\beta$  rápidas através de gases. Eles utilizaram neste trabalho uma câmara de Wilson<sup>7</sup> para investigar processos relacionados com a perda de energia de partículas  $\beta$ , cujas velocidades estavam compreendidas entre 0.5 e 0.97 vezes a velocidade da luz. Assim, conseguiram mostrar que os resultados obtidos classicamente davam apenas a ordem de grandeza dos efeitos observados como, por exemplo, o de ionização primária. Os valores obtidos para este fenômeno são significativamente maiores que os obtidos da teoria clássica, além de dependerem da velocidade das partículas  $\beta$  de modo diferente. No ano seguinte, foi publicado outro artigo por Williams [7] no qual ele afirma que até aquele momento não havia nenhuma evidência apreciável de que os fenômenos envolvidos com perda de energia por partículas  $\beta$  (e também  $\alpha$ ) ao atravessarem a matéria fossem melhor explicados através da Mecânica Quântica. No entanto, ele ressalva que a diferença fundamental entre a Teoria Quântica e a Teoria Clássica não se manifesta na perda real de energia do feixe ao atravessar certa distância e sim na forma de distribuição dessa energia perdida entre diferentes tipos de colisões, que é o tema deste artigo. Nele, Williams baseia-se nos cálculos de Gaunt [4], realizados a partir do tratamento da dispersão e absorção feito por Dirac [8], que nos levam a um resultado importante: *quando o tempo de colisão é pequeno comparado com o período natural do elétron atômico, a energia média transferida obtida através da Mecânica Quântica coincide com o valor obtido classicamente.*

<sup>6</sup>Distâncias muito maiores que as dimensões atômicas.

<sup>7</sup>*Proceedings of the Royal Society A* **104** (1923), 1-192.

Para o escopo deste trabalho, não é de nosso interesse entrarmos nos detalhes desses cálculos; desejamos apenas ressaltar um aspecto muito importante para o estudo do Método de W.W., que está implícito nos cálculos de Gaunt, qual seja: *as leis que governam a perturbação de um átomo pela força elétrica em um campo de radiação podem ser aplicadas à sua perturbação pela força elétrica de uma partícula carregada em movimento, se a reação sobre a partícula é pequena.* Em outras palavras, se a reação sobre a partícula for pequena, podemos considerá-la como o centro de um campo coulombiano, que descreve uma trajetória retilínea, e cujo efeito sobre o átomo é equivalente ao provocado por um pulso de radiação. Para entendermos o cálculo de Gaunt para o limite  $v \rightarrow c$ , não é necessário usarmos a Mecânica Quântica Relativística. Na verdade, basta levarmos em conta a transformação do tempo, decorrente da contração de Lorentz-Fitzgerald do campo da partícula em movimento que, conseqüentemente, irá alterar a dependência do potencial  $V(t)$ .

Em 1932, Williams [9] compara a teoria (não-relativística) da passagem de partículas carregadas pela matéria desenvolvida por Bethe [10], baseada na teoria de colisões de Max Born,<sup>8</sup> com resultados experimentais para alguns processos produzidos pela passagem de partículas  $\alpha$  e  $\beta$  pela matéria. As principais hipóteses de Bethe são:

- (i) A velocidade  $v$  da partícula incidente é grande comparada com a velocidade  $u$  dos elétrons dos átomos atravessados e pequena comparada à velocidade da luz  $c$ ;
- (ii) Termos da ordem de  $(u/v)^2$  e  $(v/c)^2$  são desprezados.

Neste artigo, Williams escreve:

*(...) comparando a fórmula não-relativística de Bethe com resultados experimentais para partículas com velocidades próximas à da luz, podemos deduzir a natureza do efeito relativístico real. Uma aplicação direta da Mecânica Quântica não foi feita para o problema e, portanto, não existe uma fórmula teórica com a mesma generalidade das obtidas por Bethe no caso não-relativístico.*<sup>9</sup>

Uma correção para o efeito relativístico foi feita por Williams [7] para o caso de colisões distantes.

Para nos situarmos melhor, vamos comentar rapidamente a diferença entre a teoria de Bethe e a de Gaunt. No caso de átomos de um elétron, o problema é encontrar a solução para a equação de onda de duas partículas no campo devido a cada uma e no campo do núcleo atômico:

$$\left[ \frac{1}{M} \nabla_R^2 + \frac{1}{m} \nabla_r^2 + \frac{2}{\hbar^2} (E - V) \right] \psi = 0$$

$M$  e  $m$  são, respectivamente, as massas da partícula incidente ( $\alpha$  ou  $\beta$ ) e do elétron atômico;  $R$  e  $r$  são as coordenadas destas duas partículas em relação ao núcleo, que consideramos fixo.  $E = mv^2/2 - E_0$  é a energia total do sistema, onde  $v$  é a velocidade inicial da partícula incidente e  $E_0$  é a energia do átomo não perturbado. Finalmente,  $V$  é a energia potencial do sistema dada por:

$$V = -\frac{Ze^2}{|r|} + \frac{Ze q_{in}}{|R|} - \frac{e q_{in}}{|R - r|}$$

onde  $Ze$  é a carga do núcleo,  $e$ , a carga do elétron e  $q_{in}$ , a carga da partícula incidente. Os termos de perturbação são os dois últimos. Bethe utilizou a teoria de perturbações com

<sup>8</sup>Na teoria de Born, o efeito da perturbação é obtido por aproximações sucessivas. Veja qualquer livro de texto de Mecânica Quântica.

<sup>9</sup>Identificamos nessas palavras uma motivação para seus artigos seguintes.

uma aproximação de primeira ordem (*i.e.*, fazendo  $\psi = \psi_0 + \psi'_1$  na equação de Schrödinger e desprezando termos contendo o produto de  $\psi'_1$  e o potencial de perturbação). Já o método de Gaunt é radicalmente diferente deste. Conforme já foi visto, ele admite que a partícula incidente praticamente não sofre alteração em sua trajetória; portanto, o parâmetro de impacto não sofre variação. Sua passagem pelo átomo gera um potencial dependente do tempo de modo conhecido [4]. O resultado desta perturbação é encontrado resolvendo-se a equação de onda dependente do tempo para o elétron do átomo.

Sabemos que a dinâmica de uma partícula na Mecânica Quântica não-relativística pode ser expressa pela equação

$$|\alpha, t\rangle = T(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle$$

onde  $|\alpha, t\rangle$  representa o estado do sistema num instante  $t$  e  $T(t, t_0)$  é um operador linear que independe do estado inicial  $|\alpha, t_0\rangle$ . Nesta equação, está implícito o princípio da causalidade e o fato de que cada componente de um estado evolui como cada qual o faria independentemente uma das outras. É fácil verificarmos que

$$T(t_2, t_1)T(t_1, t_0) = T(t_2, t_0) \quad (3)$$

$$T(t, t) = 1$$

e

$$i\hbar \frac{dT}{dt} = H(t)T \quad (4)$$

Vamos supor que um certo sistema não perturbado seja descrito por uma hamiltoniana  $H_0$  que se encontre em um auto-estado  $|\alpha, t_0\rangle$ . Em presença de uma perturbação  $V(t)$ , a nova hamiltoniana do sistema será  $H_0 + V(t)$ , o que causará uma mudança de estado do sistema. Como já vimos, num instante  $t$ , o estado do sistema será descrito, na visão de Schrödinger, por  $T(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle$ . Por comodidade, representemos o estado inicial  $|\alpha, t_0\rangle$  por  $|1\rangle$  e um outro estado arbitrário do sistema por  $|f\rangle$ . Assim, a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado  $|f\rangle$  é dada por

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow f) = |\langle f|T|1\rangle|^2$$

É conveniente trabalharmos com um novo operador linear

$$\tilde{T} = \exp\left(\frac{iH_0\tau}{\hbar}\right) T$$

onde  $\tau = t - t_0$ . Podemos, assim, reescrever a equação (4) em termos apenas do termo de perturbação  $V$ , *i.e.*,

$$i\hbar \frac{d\tilde{T}}{dt} = \tilde{V}\tilde{T}$$

onde

$$\tilde{V} = \exp\left(\frac{iH_0\tau}{\hbar}\right) V \exp\left(\frac{-iH_0\tau}{\hbar}\right)$$

Logo,

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow f) = |\langle f|\tilde{T}|1\rangle|^2$$

o que mostra que os operadores  $T$  e  $\tilde{T}$  são igualmente bons para calcularmos a probabilidade de transição. Se a perturbação  $V(t)$  for pequena, obtemos, em primeira ordem,

$$\mathcal{P}(1 \rightarrow f) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt' \langle f|V(\tilde{t}')|1\rangle \right|^2$$



Podemos tratar perturbativamente a radiação eletromagnética incidente sobre um sistema. Isto foi feito de fato por Dirac [8], desprezando os efeitos do campo magnético da radiação incidente e admitindo ainda que os comprimentos de onda das componentes harmônicas desta radiação são todos muito maiores que a dimensão característica do sistema atômico. Por simplicidade, ele tratou o caso de uma onda plana polarizada. O resultado encontrado, usando-se a equação anterior, foi o seguinte: *a probabilidade de transição do sistema entre dois estados  $|1\rangle$  e  $|f\rangle$  depende somente das componentes de Fourier da radiação incidente, cuja frequência é dada pela frequência de Bohr  $\nu = |E_f - E_1|/h$ , onde  $E_f$  e  $E_1$  são, respectivamente, as energias destes dois estados.* Da Eletrodinâmica Clássica,<sup>10</sup> sabemos que o espectro da radiação incidente (energia que atravessa uma área unitária por intervalo unitário de frequência em torno de uma dada frequência  $\nu$ ) é proporcional ao quadrado da transformada de Fourier do campo elétrico,  $E(\omega)$ . Logo, a probabilidade de transição do sistema é proporcional a  $|E(\omega)|^2$ . Veremos na próxima seção que esta relação simples é importante no contexto do método de W.W. e está relacionada com o método desenvolvido por Fermi para tratar colisões, conforme já mencionamos.

Na conclusão do artigo [9], Williams chama atenção para o fato de que para efeitos como a ionização total de um gás monoatômico, por exemplo, a própria teoria de Bethe não é satisfatória e ressalta a importância de novos cálculos e novas experiências para se vencer essas dificuldades. Em especial, o problema da ionização de átomos e a relação entre a perturbação de átomos distantes pelo campo de uma partícula carregada em movimento e a perturbação dos átomos por radiação, baseada no trabalho de Fermi [3] são discutidos no seu artigo de 1933 [11]. Os trabalhos [11-14] tratam da derivação semi-clássica do método de W.W., que será objeto de estudo da próxima seção.

Note que tudo o que discutimos nestas duas primeiras seções está intimamente ligado a fenômenos de espalhamento ou frenagem de partículas carregadas ao passarem pela matéria e efeitos correlacionados. Atualmente, sabemos que o raio atômico é da ordem de  $10^{-8}$  cm e, conseqüentemente, para se chegar a este resultado foi necessário utilizar métodos de observação indireta. Usar partículas carregadas como sondas para compreender a constituição da matéria é um procedimento que herdamos dos trabalhos pioneiros de Thomson e Rutherford e que continua sendo utilizado para obter informações de regiões de dimensões cada vez menores, envolvendo, para isto, energias da sonda cada vez maiores.

N. Bohr e E.T. Williams foram dois físicos que muito contribuíram para o estudo teórico desses fenômenos. O próprio Williams disse uma vez [15] que o seu interesse pelo estudo da teoria de colisões começou ao ler, em 1926, os trabalhos de Bohr [1-2]. Em 1933-34, tiveram a oportunidade de discutir pessoalmente vários aspectos ligados a problemas de colisão e chegaram a fazer, um pouco mais tarde, um plano de trabalho conjunto, o qual não foi levado adiante devido ao isolamento de ambos imposto pela II Guerra Mundial.

Uma discussão detalhada sobre a relação entre a teoria clássica e a aproximação de Born para problemas de colisão pode ser encontrada no artigo de Williams [15], datado de 1945. Outro artigo no qual é discutido o problema da passagem de partículas carregadas pela matéria, dando ênfase à combinação de efeitos clássicos e quânticos, é um artigo de revisão escrito por Bohr em 1948 [17].

Esperamos que com o exposto até aqui tenha ficado claro que dos estudos dos efeitos produzidos por partículas  $\alpha$  e  $\beta$  interagindo com a matéria ficaram lições e idéias que acabaram sendo úteis para o desenvolvimento do método de W.W.

---

<sup>10</sup>Veja, por exemplo, o livro do Jackson [16], Cap. 14.

### 3. Derivação semi-clássica do método de W.W.

#### 3.1 Descrição do método

Quando queremos calcular os níveis de energia do átomo de hidrogênio, por exemplo, podemos considerar o núcleo como um centro de força fixo, ou que se move minimamente, devido a sua massa  $M$  ser muito maior que a do elétron,  $m$ ; o erro envolvido nesta aproximação é da ordem de  $\sqrt{m/M}$ . Pelo mesmo motivo, quando estamos tratando de um problema de colisão atômica, podemos também pensar na partícula incidente como um centro de força em movimento, desde que sua massa seja bem maior do que a massa do elétron do átomo. Em verdade, simplificaremos nosso estudo trabalhando apenas com átomos de um elétron. Na maioria das aplicações que se seguem, a partícula perturbada é um elétron e sua massa será sempre menor que a das partículas incidentes. Mesmo no caso de perturbação causada por partículas  $\beta$ , esta condição é satisfeita, pois ela se desloca com velocidade  $v$  para um observador no referencial da partícula perturbada e, portanto, sua massa será aumentada por um fator  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ .

Esse foi o procedimento utilizado por Gaunt [4], o primeiro a usar o método do parâmetro de impacto ao mesmo tempo que usava a Mecânica Quântica. Os cálculos de Gaunt são semi-clássicos, pois ainda envolvem o conceito de trajetória e a velocidade da partícula incidente é bem definida, embora ele utilize a Mecânica Quântica, para a qual vale o princípio de incerteza de Heisenberg. Sabemos, no entanto, que existe um limite finito a partir do qual podemos observar um sistema físico sem perturbá-lo; podemos dizer que este é um limite entre as Mecânicas Clássica e Quântica. Assim, quando a reação sobre o sistema estudado for pequena, é lícito utilizar métodos semi-clássicos.

Suponha que um campo perturbador esteja limitado a um volume de dimensão linear  $a$ , onde o potencial é da ordem de  $V$ . Podemos tratar um problema de espalhamento neste campo do ponto de vista clássico, se o comprimento de onda de De Broglie é pequeno comparado com as dimensões do campo espalhador e se a incerteza sobre o momento da partícula,  $h/a$ , for pequena comparada com o momento transferido,  $p \simeq V/v$  [15]. Portanto, um tratamento semi-clássico é válido se

$$\frac{h}{mv} \ll a, \quad \frac{Va}{hv} \gg 1$$

A condição para só podermos utilizar a aproximação de Born é, pelos argumentos apresentados em [15], exatamente oposta:  $Va/hv \ll 1$ . Para o caso do campo coulombiano,  $V = Ze^2/r$ , sendo  $Ze$  a carga nuclear,  $ze$ , a carga da partícula espalhada e  $a \simeq r$ , o que nos leva às seguintes condições:

$$\frac{Va}{hv} = \frac{Zze^2}{hv} \begin{cases} \gg 1, & \text{tratamento clássico} \\ \ll 1, & \text{aproximação de Born} \end{cases}$$

os quais usaremos mais adiante.

É no trabalho clássico de Bohr [1], discutido na Seção 2.1, que conceitos de espaço-tempo ordinário, bem como os conceitos de parâmetro de impacto e tempo de colisão desempenham um papel fundamental no estudo do processo de colisão. Vimos que a principal hipótese de Bohr, nesse artigo, é que o efeito do elétron atômico sobre a partícula incidente deve ser obtido levando-se em conta a força de ligação ao núcleo. Vimos também que o fato de considerarmos esta força só influia na perda de energia da partícula incidente quando  $T_b \gtrsim T$ . Pela definição de tempo de colisão que demos, este é da ordem de  $b/v$ , no caso não-relativístico, onde  $b$  é

o parâmetro de impacto e  $v$ , a velocidade da partícula incidente. Portanto, o elétron pode ser tratado como livre, se o parâmetro de impacto da colisão for da ordem de  $v/\nu \sim (v/u)\ell$ , onde  $\nu$  é a frequência natural do elétron orbital,  $u$ , sua velocidade orbital e  $\ell$ , a dimensão linear da órbita perturbada.<sup>11</sup> Na maioria dos casos práticos, nos quais as partículas incidentes são partículas  $\alpha$  ou  $\beta$ , a velocidade delas é bem maior que a velocidade orbital do elétron e, conseqüentemente, este pode ser considerado como livre até um parâmetro de impacto crítico cuja dimensão é muito maior que a dimensão atômica.

Em 1933, Williams [12] discute a validade e a vantagem do tratamento de colisões entre partículas leves, nas quais o momento transferido é pequeno comparado com o momento da partícula incidente, através do método do parâmetro de impacto. Neste caso, podemos desprezar a variação na trajetória da partícula incidente e, conseqüentemente, considerarmos esta partícula como sendo a origem de um campo de forças coulombiano se movendo numa trajetória retilínea, de acordo com o que discutimos no início desta seção. O parâmetro de impacto é definido em relação ao elétron do átomo. Para obtermos uma determinada probabilidade de excitação do átomo, calculamos, em princípio, a perturbação do átomo para um certo parâmetro de impacto  $b$  e, então, integramos sobre todos os valores possíveis de  $b$ . A equivalência entre o método do parâmetro de impacto (utilizado por Gaunt) e o método aproximado de Born (Bethe) para calcular a perda de energia em colisões atômicas foi demonstrada matematicamente por Mott [18] e Frame [19]. Mott conseguiu mostrar que se consideramos o elétron no campo do núcleo e no campo de força criado pela partícula perturbadora (problema de um corpo), ou o elétron e a partícula perturbadora no campo do núcleo (problema de dois corpos), obtemos a mesma probabilidade de transição para o elétron, desde que  $m/M \ll 1$ .

Para distâncias muito maiores que as dimensões atômicas (colisões distantes) podemos admitir que a força perturbativa seja uniforme em todo o átomo e podemos decompô-la em uma componente perpendicular  $F_{\perp}$  e outra paralela à direção do movimento  $F_{\parallel}$  da partícula incidente, dadas pelas equações (1), antes de usar a teoria de perturbações. Ao proceder desta maneira, Williams está usando o fato de que se o átomo está sob a influência de duas forças  $F_{\perp}$  e  $F_{\parallel}$ , ambas uniformes sobre ele, a probabilidade de transição total  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\perp} + \mathcal{P}_{\parallel}$ , obtida via teoria de perturbação, é a mesma se o efeito perturbativo é provocado pelo campo de uma partícula carregada, ou se provocado por campo de radiação (no caso, plano-polarizada).

Esse procedimento utilizado por Williams [11] se assemelha bastante ao procedimento de Bohr [1-2] e simplifica muito os cálculos que haviam sido feito por Gaunt [4], no qual ele trabalhava diretamente com a força resultante. Desta forma, Williams reobteve o resultado clássico de Bohr para a potência de frenagem,  $-dT/dx$ , da partícula carregada que passa pela matéria, com a condição  $vh/J\lambda \gg 1$ ,<sup>12</sup> onde  $J$  é o potencial de ionização do elétron. Lembremos que o resultado obtido por Bohr está vinculado à condição de que  $\lambda$  deva ser pequeno comparado a  $v/\nu$  e que a velocidade orbital do elétron é pequena comparada com a velocidade da partícula perturbadora. Ora, o parâmetro  $\lambda$  pode ser tomado da ordem da dimensão atômica  $\ell$ ; pelo princípio da incerteza,  $\ell \simeq h/mu$  e a energia de ionização  $J \simeq mu^2$ . Isto implica que a condição  $vh/J\lambda \gg 1$  é satisfeita se  $v \gg u$ . Esta condição resulta também do fato de termos considerado pequena a perturbação provocada pela partícula incidente, o que não se verificaria se  $v \gtrsim u$ . A condição  $v \gg u$  assegura também que todas as colisões distantes sejam necessariamente colisões leves, visto que o movimento transferido ao elétron,  $p \simeq (2mJ)^{1/2} \simeq mu$  e, portanto,  $p \ll mv$  se  $v \gg u$ .

Quando Williams faz a correção relativística para colisões leves, ele reobtem as expressões (2) às quais Bohr chegou para as forças  $F_{\perp}$  e  $F_{\parallel}$ . No caso de colisões leves, vimos que a reação sobre a partícula que está se movendo é pequena e consideramos que esta se move numa trajetória

<sup>11</sup>Veja as hipóteses de Bohr (i), (ii) e (iii) na Seção 2.1.

<sup>12</sup>Condição para aplicação da aproximação de Born.

retilínea. Assim, podemos considerar apenas o efeito relativístico da partícula perturbadora, o que implica que a dissipação de energia nessas colisões pode ser obtida usando a Mecânica Quântica não-relativística, enquanto que o efeito relativístico sobre o campo da partícula perturbadora só influi na perturbação exercida por este campo.

Vejam agora a relação entre o presente trabalho de Williams [11] e o de Fermi [3]. Vimos, na Seção 2.2, que Dirac mostrou que a probabilidade de transição de um sistema é proporcional à intensidade da componente harmônica de frequência  $\nu$  do espectro de Fourier da força perturbadora. O coeficiente de proporcionalidade é exatamente igual ao coeficiente de absorção fotoelétrica da radiação de frequência  $\nu$ , que é a frequência de Bohr para a transição. Isto sugere que, em colisões distantes – nas quais a força perturbativa  $F$  é uniforme sobre o átomo – podemos calcular a perturbação sobre o átomo tomando a transformada de Fourier de  $F$  e supondo que cada componente se comporte como radiação de mesma frequência. Esta é a principal idéia do trabalho de Fermi. Analisemos melhor esta conexão entre a perturbação em colisões distantes e o efeito fotoelétrico da radiação. Neste último efeito, o movimento do fotoelétron é contrabalançado principalmente pelo recuo do núcleo, enquanto que a reação sobre o campo de radiação é pequena. Estudando a distribuição de átomos excitados e ionizados, em relação à trajetória da partícula perturbadora, Williams verificou que, para colisões distantes, acontece basicamente o mesmo, pois a reação sobre a partícula em movimento é pequena. Neste ponto é conveniente introduzirmos um conceito importante: o de *raio de ação* de uma partícula, o qual tem uma relação íntima com a teoria de Fermi, como veremos a seguir.

Em colisões distantes, podemos admitir que a energia transferida na colisão seja aproximadamente igual ao potencial de ionização  $J$  e, assim, a frequência de Bohr para tal transição é  $f \sim J/h$ . Sabe-se que os campos produzidos por uma partícula carregada em movimento assumiam valores apreciáveis num ponto do espaço durante um intervalo de tempo  $T_b \simeq b/\gamma v$  (no caso relativístico), chamado tempo de colisão. Os casos limites  $T_b \ll 1/f$  e  $T_b \gg 1/f$  correspondem, respectivamente, a  $b \ll \rho$  e  $b \gg \rho$ , onde  $\rho \equiv \gamma v/J$ , e são discutidos em [11]. Só no segundo caso, no qual a perturbação varia pouco num intervalo de tempo da ordem do período  $1/f$ , é que a probabilidade de transição (proporcional a  $|E(\omega)|^2$ ) é praticamente nula. Portanto, vemos que a maior incidência de átomos excitados e íons se dá até uma distância da ordem de  $\rho$ , sendo desprezível para distâncias maiores. Por este motivo,  $\rho$  é chamado *raio de ação* da partícula. Com isso, vemos que o espectro de frequências tende a assumir valores cada vez menores com o crescimento da frequência  $f$ , até um valor limite dado por  $f_{max} \sim \gamma v/b$ , que satisfaz a condição  $T_b \gg 1/f$ , a partir da qual assume valores insignificantes. Portanto, a relação com o trabalho de Fermi pode ser enunciada da seguinte forma: *o limite  $b \gg \rho$  para o parâmetro de impacto da colisão,  $b$ , a partir do qual são desprezíveis os efeitos criados pela partícula incidente, corresponde ao fato de que, para estes valores de  $b$ , não existe, no espectro de Fourier do campo perturbador, uma frequência suficientemente alta para excitar o átomo.*

Há uma classe de fenômenos de radiação onde a fonte do campo é uma carga pontual em movimento. Do ponto de vista da Eletrodinâmica Clássica, é conveniente desenvolvermos um formalismo no qual a intensidade da radiação esteja intimamente ligada à trajetória da partícula (através do parâmetro de impacto) e ao seu tipo de movimento. De um ponto de vista semi-clássico, vimos que também *é possível correlacionar certos problemas de colisão, envolvendo partículas carregadas, com a teoria da radiação, através da decomposição dos campos criados pelas partículas perturbadoras em componentes de Fourier e, então, comparando o efeito destas componentes com o produzido por radiação homogênea de mesma frequência e intensidade.*<sup>13</sup> Assim, este método sugere um novo ponto de vista para tratar um problema de colisão em duas etapas, qual seja: primeiro representar o campo perturbativo por radiação, e depois calcular os

---

<sup>13</sup>Estas idéias surgiram com o trabalho de Fermi [3] e foram aperfeiçoadas por von Weizsäcker [13] e Williams [14]. Por este motivo já havíamos adiantado que consideramos que o trabalho de Fermi (juntamente com o de Bohr) muito contribuiu para o desenvolvimento do Método de W.W.

efeitos da radiação.<sup>14</sup> Esta relação entre partícula e radiação, estabelecida pelo método de W.W., justifica-se pelo fato de que a Mecânica Quântica não faz nenhuma distinção, *a priori*, entre o efeito de um campo de uma partícula carregada e aquele de um campo de radiação. Em outras palavras, se dentro de uma mesma região ambos possuem a mesma descrição eletromagnética, então eles produzem os mesmos efeitos dentro desta região, contanto que a reação à interação seja pequena. Aqui estão contidas as condições de aplicabilidade do método de W.W., que vamos discutir a seguir com detalhes.

Sabe-se que, no limite  $\beta \sim 1$ , um observador em um ponto  $P$  do espaço não consegue distinguir o campo criado pela partícula em movimento e o campo de um pulso de radiação plana polarizada que se propaga na mesma direção da partícula (Figura 2).

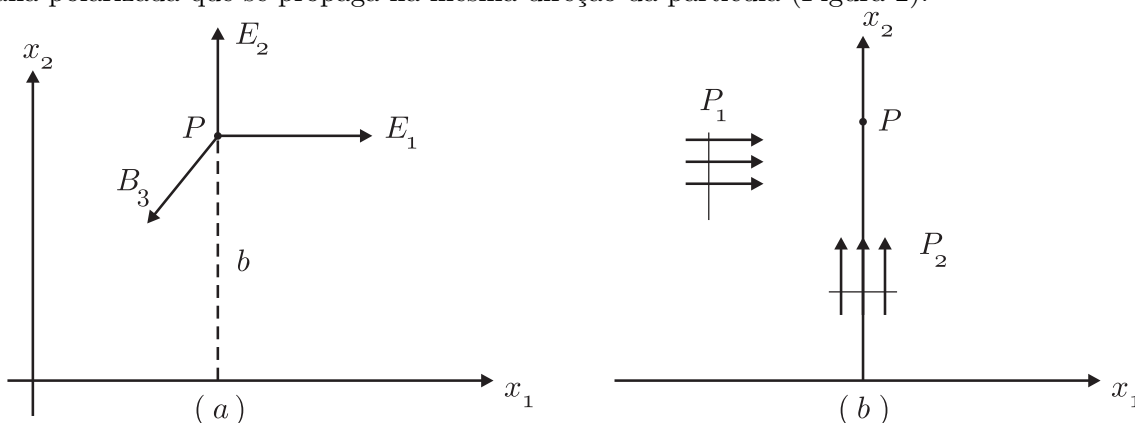


Figura 2

Assim, os campos  $E_2(t)$  e  $B_3(t)$  podem ser representados por um pulso de radiação  $P_1$  que se desloca na direção- $x_1$  (Figura 2b). No entanto, um pulso  $P_2$ , que se desloca segundo a direção- $x_2$ , não reproduz exatamente o campo criado por  $E_1(t)$ , pois não existe nenhuma componente magnética associada a  $E_1(t)$ . Apesar disto, esta é uma boa aproximação na maioria dos problemas de colisão, pois a importância relativa entre o campo magnético e o elétrico, num campo perturbativo de origem eletromagnética é da ordem de  $(u/c)^2$ , onde  $u$  é a velocidade da partícula perturbadora, que normalmente é pequena em comparação à  $c$ .<sup>15</sup> Para que os pulsos  $P_1$  e  $P_2$  produzam efeitos equivalentes àqueles produzidos pela partícula, já mencionamos anteriormente que a reação sobre a partícula em movimento deve ser pequena, de modo a podermos considerá-la como centro de um campo coulombiano que descreve uma trajetória retilínea.<sup>16</sup> Tiramos daí que a velocidade da partícula perturbadora deve ser bem maior que a velocidade da partícula perturbada; caso contrário, a perturbação não seria pequena. Vimos também que só em colisões distantes a probabilidade de transição do sistema perturbado é a mesma nos casos em que o agente perturbador é uma partícula ou um campo de radiação. Se estas condições são satisfeitas, segue-se que os pulsos  $P_1$  e  $P_2$  representam bem o campo criado pela carga  $q$ , em qualquer ponto do espaço e visto de qualquer outro sistema de referência inercial que se desloque em relação ao sistema no qual a partícula perturbadora está inicialmente em repouso. Logo, são as seguintes as condições para podermos substituir o campo produzido pela partícula por um campo de radiação, sobre a região ocupada pelo sistema perturbado, durante um processo de colisão:

i)  $\ell \ll b$ , onde  $\ell$  é da ordem das dimensões do sistema perturbado;

<sup>14</sup>Somente nesta etapa utiliza-se a Mecânica Quântica.

<sup>15</sup>Estamos supondo aqui que o sistema perturbado esteja em  $P$ .

<sup>16</sup>O efeito do princípio de incerteza é bastante pequeno, porque a incerteza na posição da partícula perturbadora é muito menor que o parâmetro de impacto ( $h/mv \ll b$ ).

ii)  $u(1 - u^2/c^2)^{-1/2} \ll v(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , onde as velocidades  $u$  e  $v$  são medidas em relação a  $S'$ .

Além das condições (i) e (ii), existe uma terceira (iii) decorrente do fato de que a probabilidade de transição do sistema perturbado depender somente das componentes de Fourier da radiação incidente sobre o sistema,<sup>17</sup> e da linearidade das equações de movimento da Mecânica Quântica. Se existe uma frequência no espectro de Fourier alta o bastante para produzir uma alteração apreciável no estado do sistema perturbado em uma dada colisão, isto irá influir no efeito das demais frequências. Isto só não irá ocorrer se o campo da partícula perturbadora for suficientemente fraco para que, em uma dada colisão, exista somente uma pequena probabilidade  $\mathcal{P}$  do sistema perturbado sofrer uma transição de seu estado inicial. Esta condição,  $\mathcal{P} \ll 1$ , corresponde à condição de aplicabilidade da aproximação de Born para tratar colisões.

Em 1934, Williams [12] comunicou que ele e von Weizsäcker mostraram que a fórmula obtida por Heitler & Sauter [20] para a perda de energia de um elétron em colisões radiativas com um núcleo atômico poderia ser obtida através de um *cálculo relativamente rápido* (método de W.W.). Outras aplicações são discutidas em [16] e envolvem interações entre partículas carregadas e campos eletromagnéticos.

A noção de campo foi introduzida por Faraday<sup>18</sup> e, até então, a interação entre partículas carregadas era entendida com base no conceito de ação à distância, onde a força entre as partículas era concebida como uma interação direta e instantânea entre o par de partículas em interação. Com a introdução do conceito de campo, duas cargas elétricas passam a interagir entre si por intermédio de um campo.<sup>19</sup> Assim, o problema de interação entre dois sistemas de cargas pode ser tratado em duas etapas: primeiro, calculamos o campo produzido por uma das distribuições e, a seguir, calculamos as forças que este campo exerce sobre a outra distribuição de cargas. A diferença fundamental entre os conceitos de ação à distância e de campos está no fato de que neste último a velocidade de propagação da informação levada pelo campo é finita. Tanto o campo elétrico como o magnético satisfazem a equação de uma onda, análoga a de uma corda vibrante, cuja velocidade de propagação da luz no meio em questão, de acordo com a síntese de Maxwell.

Foi tentando explicar o efeito fotoelétrico que Einstein introduziu o conceito corpuscular para a luz, mostrando que a própria radiação eletromagnética é quantizada. Esta seria formada de *pequenos pacotes* de energia  $h\nu$  – os *fótons* – onde  $\nu$  é a frequência da radiação. Os fótons se propagam com a velocidade da luz  $c$ , de acordo com a Relatividade Especial, deve ter massa de repouso nula. Esse novo conceito deu origem a uma dualidade onda-corpúsculo para a luz, dado que esta deveria ter também um caráter ondulatório que explicasse fenômenos como os de interferência e difração. Esta dualidade só foi compreendida com o advento da Eletrodinâmica Quântica, em 1929. De acordo com esta teoria, a interação entre partículas carregadas é feita através de trocas de fótons, ditos virtuais, pois eles estão fora de suas camadas de massa, *i.e.*, não satisfazem a relação geral da energia relativística  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ .

Vimos que, em princípio, o método de W.W. estabelece uma relação entre os efeitos de colisão de uma partícula carregada com um certo sistema e os efeitos produzidos por uma *radiação equivalente* e o mesmo sistema. Podemos associar a cada frequência  $\nu$  do espectro de Fourier do campo criado pela partícula perturbadora um fóton de energia  $h\nu$ . Neste sentido, vemos que o princípio básico do método de W.W. é substituir a partícula perturbadora por um espectro de fótons virtuais e calcular os efeitos desta *radiação equivalente* sobre o sistema perturbado. Por isso, o método de W.W. é também conhecido como *método dos fótons virtuais* ou ainda *método dos quanta equivalentes*. Do ponto de vista das aplicações do método, o que nos

---

<sup>17</sup>Veja Seção 2.2.

<sup>18</sup>Um bom resumo sobre a evolução dos conceitos do eletromagnetismo é encontrado em J.M. Bassalo, *Ciência e Cultura* **33**, 1555 (1981).

<sup>19</sup>O conceito de campo é ainda um conceito mais amplo.

interessa mais é a possibilidade de, dado um certo processo  $A$  devido à interação eletromagnética de uma partícula com um alvo, podermos obter a seção de choque  $\sigma_A$  para o processo, a partir da seção de choque de fotoprodução por fótons livres,  $\sigma_{\gamma\gamma}$ , via método de W.W. E o procedimento para isso é simples: basta integrarmos a seção de choque de fotoprodução sobre todo o espectro dos fótons equivalentes, ou seja,

$$\sigma_A = \int_{\hbar\omega_{limiar}}^{\hbar\omega_{max}} \sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega) N(\hbar\omega) d\hbar\omega \quad (5)$$

onde  $N(\hbar\omega)$  é o número de fótons virtuais por unidade de energia, que determinaremos na próxima seção.

### 3.2 Determinação do espectro de fótons equivalentes

Para determinarmos o espectro de radiação equivalente, vamos calcular a distribuição de energia por unidade de área e por intervalo unitário de frequência – o espectro de frequência  $I(\omega b)$  – dos pulsos  $P_1$  e  $P_2$ , cujas expressões para os campos são bem conhecidas [16]. Sabemos da Eletrodinâmica Clássica que

$$I(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E(\omega)|^2$$

onde  $E(\omega)$  é a transformada de Fourier do campo elétrico do pulso de radiação

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt$$

O espectro de frequência  $I_1(\omega, b)$  do pulso  $P_1$  é dado por

$$I_1(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_2(\omega)|^2$$

onde

$$E_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} e^{i\omega t} dt$$

ou, definindo  $\xi = \gamma vt/b$ ,

$$E_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{q}{vb} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i\omega b \xi / \gamma v]}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

que é uma integral cujo resultado pode ser expresso em termos da função de Bessel modificada de segunda ordem,  $K_1$ ,

$$E_2(\omega) = \frac{q}{bv} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[ \frac{\omega b}{\gamma v} K_1 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right) \right]$$

Analogamente, para o pulso  $P_2$ ,

$$I_2(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} |E_1(\omega)|^2$$

onde

$$E_1(\omega) = -\frac{q\gamma v}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{i\omega t}}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} dt$$

ou

$$E_1(\omega) = -\frac{q}{\gamma b v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi \exp[i\omega b \xi / \gamma v]}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi$$

cuja solução em termos da função de Bessel modificada,  $K_0$ , obtida de forma análoga, é

$$E_1(\omega) = -\frac{iq}{\gamma b v} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{\omega b}{\gamma v} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right]$$

Obtemos, assim,

$$\begin{aligned} I_1(\omega, b) &= \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{c b^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \\ I_2(\omega, b) &= \frac{1}{\pi^2} \frac{q^2}{c b^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[\frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)^2 K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right)\right] \end{aligned} \quad (6)$$

Para obtermos o comportamento da distribuição espectral dos pulsos  $P_1$  e  $P_2$  que representam o campo da partícula perturbadora numa colisão cujo parâmetro de impacto é  $b$ , analisemos a expressão

$$I_{1,2}(\omega, b) = \frac{c}{2\pi} \left| \int E_{2,1}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2$$

No caso de baixas frequências, *i.e.*, frequências muito menores que a *frequência de colisão* –  $\omega \ll \gamma v/b$  – a exponencial na equação acima varia muito pouco durante o intervalo de tempo para o qual os campos  $E_{2,1}(t)$  são apreciáveis. No caso, a quantidade  $I$  será independente de  $\omega$  e a denotaremos por  $I_0$ :

$$I_0 = \frac{c}{2\pi} \left| \int E_{1,2}(t) dt \right|^2$$

Substituindo os valores de  $E_{2,1}(t)$ , encontramos

$$I_0 = \begin{cases} \frac{q^2}{\pi^2 c b^2} \left(\frac{c}{v}\right)^2, & \text{para o pulso } P_1 \\ 0, & \text{para o pulso } P_2 \end{cases} \quad (7)$$

Lembre-se que, no caso de  $P_2$ ,  $E$  é uma função ímpar do tempo.

Para frequências altas –  $\omega \gg \gamma v/b$  –  $E_{1,2}(t)$  variam muito pouco num período da exponencial e, portanto,  $I(\omega, b)$  é desprezível tanto para  $P_1$  como para  $P_2$ . Assim, para o pulso  $P_1$ ,  $I_1(\omega, b)$  é constante para  $\omega \ll \gamma v/b$ , caindo rapidamente na região  $\omega \sim \gamma v/b$  e é desprezível em relação a  $I_0$ , para  $\omega \gg \gamma v/b$ . Já o pulso  $P_2$  só é apreciável na região  $\omega \sim \gamma v/b$ , para a qual sua intensidade em relação a  $P_1$  é da ordem de  $\gamma^{-2}$ . Este comportamento para os pulsos  $P_1$  e  $P_2$  é mostrado na Figura 3.



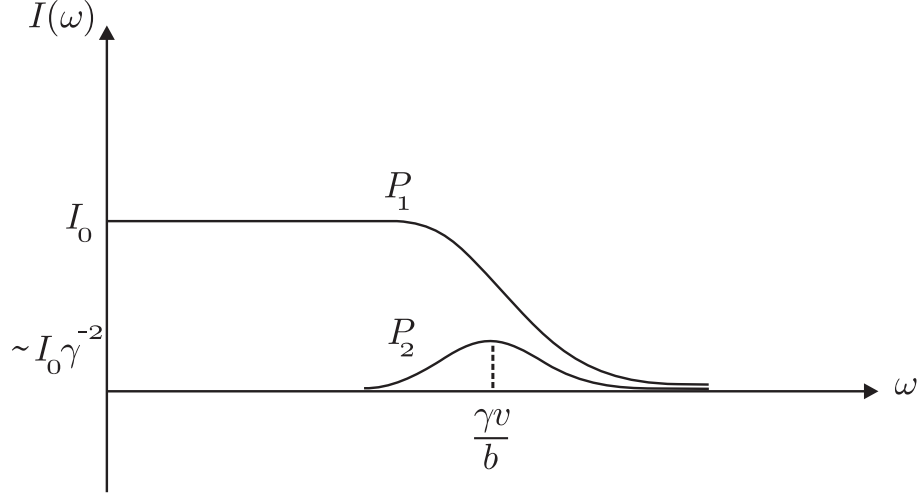


Figura 3

Podemos agora calcular a energia por intervalo de frequência presente no campo de radiação equivalente. Para isto, basta integrarmos o espectro de frequência sobre todos os parâmetros de impacto possíveis:

$$I(\omega) = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} [I_1(\omega, b) + I_2(\omega, b)] b db \quad (8)$$

A integração, no entanto, não deve se estender até  $b \rightarrow 0$  por imposição da Mecânica Quântica, na qual as partículas são descritas por pacotes de onda. Para podermos falar de um parâmetro de impacto  $b$ , a largura  $\Delta x$  do pacote de onda deve ser menor que  $b$ . Pelo princípio de incerteza, temos que  $\Delta x \gtrsim \hbar/p_{max}$ , onde  $p_{max}$  é o máximo momento transferido na colisão e ao mesmo tempo a relação  $b > \Delta x$  deve ser satisfeita. Isto implica que deva existir um parâmetro de impacto  $b_{min}$  dado por  $b_{min} \sim \hbar/p_{max}$ .<sup>20</sup> Assim, o método de W.W. pode ser utilizado se para valores maiores que  $b_{min}$  os efeitos perturbativos possam ser bem representados por pulsos de radiação equivalente. Já o limite  $b_{max}$  (correspondente a  $p_{min}$ ) não precisa ser discutido, pois vimos que, para distâncias maiores que o raio de ação da partícula, o efeito desta é muito pequeno. Consequentemente, o espectro da radiação equivalente automaticamente incorpora o limiar de corte correspondente a  $p_{max}$ . Por outro lado, devemos poder desprezar os efeitos da partícula perturbadora para  $b < b_{min}$ , ou então utilizar outro método diferente do de W.W.

As integrais que resultam de (8) podem também ser expressas em termos de funções de Bessel modificadas, e o resultado é

$$I(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ \xi_{min} K_0(\xi_{min}) K_1(\xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2} \xi_{min}^2 [K_1^2(\xi_{min}) - K_0^2(\xi_{min})] \right] \quad (9)$$

onde  $\xi_{min} \equiv \omega b_{min}/(\gamma v)$ .

Para  $\omega \ll \gamma v/b_{min}$ , ou  $\xi_{min} \ll 1$ , as funções de Bessel modificadas se comportam como<sup>21</sup>

$$K_0(\xi_{min}) \simeq -[\ln(\xi_{min}/2) + 0.5772]$$

e

$$K_1(\xi_{min}) \simeq \frac{1}{\xi_{min}}$$

<sup>20</sup>Nordheim, G. *et al.*: "The disintegration of High Energy Protons", *Physical Review* **51**, 1037 (1937).

<sup>21</sup>Veja, por exemplo, Jackson [16], Cap. 3.

Assim, nesta aproximação, podemos desprezar o termo da  $\mathcal{O}(\xi_{min}^2)$  em (9), pois  $\xi_{min} \ll 1$ , e obtemos

$$\begin{aligned} I(\omega) &\simeq \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ K_0(\xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \\ &\simeq \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ -\ln(\xi_{min}/2) - 0.5772 - \frac{v^2}{c^2} \right] \\ &\simeq \frac{2q^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left[ -\ln(0.8905 \xi_{min}) - \frac{v^2}{2c^2} \right] \end{aligned}$$

que, em termos de  $b_{min}$ , se escreve<sup>22</sup>

$$I(\omega) \simeq \frac{2q^2}{\pi c} \beta^{-2} \left[ \ln \left( \frac{1.123 \gamma v}{\omega b_{min}} \right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (10)$$

com a condição  $\omega \ll \gamma v/b_{min}$  e  $\beta \equiv v/c$ .

No limite de altas frequências,  $\omega \gg \gamma v/b_{min}$ , vamos obter

$$I(\omega) \simeq \frac{q^2}{c} \beta^{-2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) \exp \left( -\frac{2\omega b_{min}}{\gamma v} \right) \quad (11)$$

A Figura 4 mostra o comportamento de  $I(\omega)$ , dado pela equação (9) no limite  $\beta \sim 1$ , assim como a aproximação para baixas frequências, equação (10).

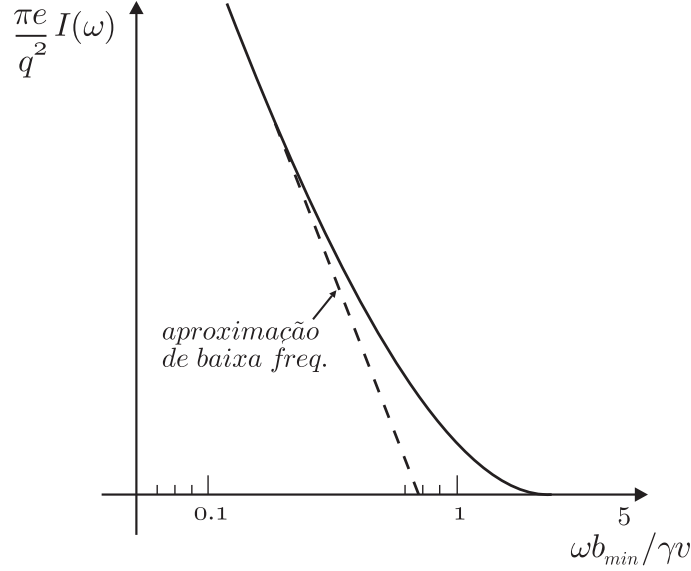


Figura 4

Com uma rápida inspeção da Figura 4, vemos que no limite  $\beta \sim 1$  o espectro de energia da radiação equivalente é constituído predominantemente de fótons de baixas energias, com alguns se estendendo até frequências da ordem de  $2\gamma v/b_{min}$ . Esta distribuição de energia corresponde a um número de fótons virtuais que pode ser obtido através da relação

$$I(\omega)d\omega = \hbar\omega N(\hbar\omega)d(\hbar\omega) \quad (12)$$

<sup>22</sup>Note que a constante 1.123 no argumento do logaritmo já havia aparecido nos cálculos de Bohr.

Das equações (10) e (12) obtemos o número de fótons virtuais por unidade de energia no limite de baixas frequências:

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{q^2}{\hbar c} \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \left[ \ln \left( \frac{1.123\gamma v}{\omega b_{min}} \right) - \frac{\beta^2}{2} \right] \quad (13)$$

que pode ser reescrita como:

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{\alpha Z^2}{\beta^2} \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( f \frac{\gamma v}{\omega b_{min}} \right) \quad (14)$$

onde  $q = Ze$  é a carga da partícula perturbadora,  $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$  é a constante de estrutura fina e  $f \equiv 1.123 \exp(-0.5\beta^2)$ .

Para o caso ultra-relativístico,  $\beta \sim 1$ ,  $f = 0.681$  e

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \frac{\alpha Z^2}{\beta^2} \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( 0.681 \frac{\gamma c}{\omega b_{min}} \right) \quad (15)$$

As duas últimas expressões representam, igualmente, o efeito do campo da partícula que se move com um parâmetro de impacto maior que  $b_{min}$  em relação ao sistema perturbado. Então, recapitulando, a validade da aplicação do método de W.W. a problemas de colisão depende do fato de podermos ou não encontrar um valor  $b_{min}$  de tal modo que o efeito do campo da partícula perturbadora seja bem pequeno, para distâncias menores que  $b_{min}$  e que, ao mesmo tempo, o campo perturbador possa ser “substituído” por um campo de radiação, respeitando as condições (i)-(iii) da Seção 3.1.

Na realidade, como vimos que só podemos determinar a ordem de grandeza  $b_{min}$ , deveríamos ter escrito  $g$  no lugar de  $f$  na equação (14) na qual o valor exato de  $g$  não é conhecido, sabendo-se apenas que é um coeficiente da ordem da unidade. *Esta incerteza sobre o valor do coeficiente  $g$  representa o grau de aproximação alcançado pelo método de W.W. em um determinado problema.*

Analisando a equação (14) vemos que os principais fatores envolvidos na relação dos efeitos da partícula carregada, com os da radiação, são a constante de estrutura fina  $\alpha$  e o argumento do logaritmo, pois este depende essencialmente da força coulombiana. O coeficiente  $\gamma v/\omega$  representa a distância máxima, em relação à trajetória da partícula que se move com velocidade  $v$ , até aonde encontramos a frequência  $\omega$  no espectro do seu campo (veja Figura 4).

O exemplo mais simples ao qual podemos aplicar o método de W.W. é o de ionização (ou excitação) de um átomo, causado por uma partícula em movimento. Este efeito é relacionado com o efeito fotoelétrico da radiação e pode ser calculado considerando-se a absorção fotoelétrica da radiação equivalente [11] e [14].

## 4. Aplicações do método de W.W.

### 4.1 Excitação e ionização de átomos

Não podemos fazer um tratamento completo da ionização e da excitação de um átomo produzida por uma partícula carregada, usando o método de W.W., pois as condições de aplicabilidade do mesmo (Seção 3.1) não são satisfeitas em colisões para as quais o parâmetro de impacto é menor que as dimensões atômicas ( $b < \ell$ ). Assim, o método só pode ser aplicado quando  $b > \ell$ .

Consideremos átomos com apenas um elétron no estado fundamental e que a velocidade  $v$  do elétron incidente é grande comparada com a velocidade orbital do elétron do átomo. A equação (14) nos dá a intensidade da radiação equivalente que representa o campo da partícula incidente para  $b > \ell$ . Podemos tomar a dimensão atômica como o mínimo parâmetro de impacto ( $b_{min} = \ell$ ) que aparece no argumento do logaritmo de (14) e, na verdade, não precisamos do valor exato de  $\ell$ . Podemos tomá-lo como da ordem de grandeza do diâmetro da órbita de Bohr do átomo de hidrogênio. Lembremos que a energia total a ser transferida para o átomo para levar o elétron orbital a uma distância infinita do núcleo (potencial de ionização  $J$ ), deve ser igual à energia cinética do elétron ligado, e que a velocidade do elétron numa órbita, de acordo com o modelo de Bohr, é  $v_n = n\theta\hbar/mr_n$ , onde  $r_n$  é o raio da órbita e  $m$ , a massa do elétron. No estado fundamental,  $n_\theta = n = 1$ , donde

$$J = \frac{1}{2}mv^2 \quad ; \quad v = v_1 = \frac{\hbar}{ma}$$

e, portanto,

$$a = \left( \frac{\hbar^2}{2mJ} \right)^{1/2}$$

onde  $a$  é o raio de Bohr do estado fundamental. Teremos, assim,

$$b_{min} \sim \ell = 2\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mJ}}$$

Apesar das condições de aplicabilidade do método de W.W. não serem válidas para  $b < \ell$ , veremos que a contribuição destas colisões é bem pequena. Levando o valor de  $b_{min}$  em (14), obtemos a seguinte distribuição de fótons virtuais:

$$N(\hbar\omega) = \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f\gamma v\sqrt{2mJ}}{2h\nu} \right)$$

Em termos da energia transferida,  $Q = h\nu$ ,

$$\begin{aligned} N(\hbar\omega) &= \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f\gamma v\sqrt{2mJ}}{2Q} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gmv^2\gamma^2 J}{Q^2} \right) \end{aligned}$$

onde  $g$  é da ordem da unidade.<sup>23</sup> Para  $Z = 1$ ,

$$N(\hbar\omega) = \frac{1}{\pi} \alpha \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left[ \frac{gmv^2 J}{(1 - \beta^2)Q^2} \right] \quad (16)$$

Agora podemos estudar a ionização produzida pelo elétron considerando a absorção fotoelétrica da radiação virtual, cujo espectro é representado por (16). Na realidade, a probabilidade de ionização  $\phi_1(Q)dQ$ , com a energia transferida situando-se entre  $Q$  e  $Q + dQ$ , é o produto da equação (16) pelo coeficiente atômico de absorção,  $\mu$ , da matéria atravessada pela radiação de frequência  $\omega = Q/\hbar$ . Então

---

<sup>23</sup>Se  $\beta \sim 1, g \sim 0.5$ .

$$\phi_1(Q)dQ = \frac{1}{2\pi} N(\omega)\mu(\omega)d\omega \quad (17)$$

Podemos usar uma expressão aproximada para  $\mu$ , no caso de átomos hidrogenóides, qual seja [164]

$$\mu(\nu) = 0.77\pi \left(\frac{e^2}{mc}\right) \left(\frac{J}{h}\right)^{1.8} \nu^{-2.8}$$

Levando este valor em (17) e substituindo  $\nu = Q/h$ , obtemos

$$\phi_1(Q)dQ = 0.77 \left(\frac{2\pi e^4}{mv^2 J^2}\right) \left(\frac{J}{Q}\right)^{3.8} \ln \left[\frac{gmv^2 J}{(1-\beta^2)Q^2}\right] dQ \quad (18)$$

Para obtermos o efeito total do elétron incidente sobre o átomo, devemos adicionar à equação (18) o efeito das colisões para  $b < \ell$ . Neste caso, o elétron pode ser considerado livre e a probabilidade de ionização é obtida usando-se a lei do espalhamento de Rutherford. O resultado obtido é [14]

$$\phi_2(Q)dQ = \left(\frac{2\pi e^4}{mv^2}\right) \left(1 + \frac{4J}{3Q}\right) \frac{dQ}{Q^2} \quad (19)$$

A soma das probabilidades dadas nas equações (18) e (19) está de acordo com a distribuição devida a todos os tipos de colisão, obtida por Bethe [10] usando a teoria de Born. Podemos fazer um gráfico da probabilidade de excitação em função da razão  $Q/J$ , para elétrons com energia  $mv^2/2 = 2.5 \times 10^3$  joules, com as unidades escolhidas de tal maneira que as áreas sob as curvas sejam proporcionais ao número de colisões (Figura 5).

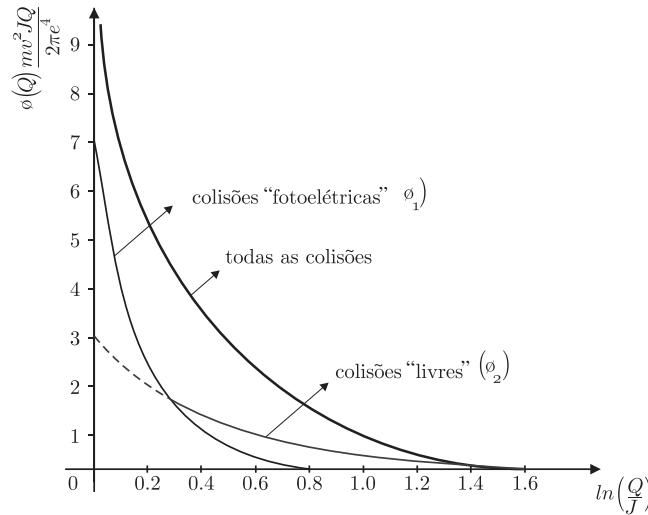


Figura 5

Analizando este gráfico vemos que, embora tanto  $\phi_1(Q)$  como  $\phi_2(Q)$  cresçam muito com o decréscimo de  $Q$ , a maior contribuição para a probabilidade total é devida à curva  $\phi_1(Q)$ . Desta forma, vemos que a grande concentração de perdas de energia próximas ao potencial de ionização, que está de acordo com os cálculos de Bethe, é devida à ação fotoelétrica do campo de partícula perturbadora em colisões distantes.

## 4.2 Excitação e desintegração de núcleos atômicos por elétrons

Existem dois processos através dos quais um núcleo atômico pode ser desintegrado pela ação de sua interação com uma partícula que incide sobre ele. O primeiro seria a captura desta partícula (com ou sem emissão de outra partícula pelo núcleo) e, no segundo caso, a partícula incidente perderia apenas parte de sua energia, continuando livre após a colisão. O segundo tipo de desintegração é um processo análogo ao de ionização de átomos, que discutimos na seção anterior.

Supondo que, depois de interagir com uma partícula  $A$ , um núcleo se desintegre emitindo uma partícula  $B$ , podemos considerar dois tipos distintos de efeitos: 1) o núcleo se desintegra pela ação fotoelétrica da partícula  $A$ ; 2) a partícula  $B$  recebe virtualmente a energia necessária para ser emitida pelo núcleo, a partir da colisão com  $A$ . E o que nos permite fazer tal classificação? É exatamente a relação entre as velocidades de  $A$  e  $B$ ,  $v_A \gg v_B$ , que é uma das condições de aplicabilidade do método de W.W. Se  $A$  for uma partícula  $\alpha$  ou um próton, esta condição dificilmente é satisfeita. No entanto, elétrons com energias suficientes para desintegrar o núcleo geralmente satisfazem essa condição, pois, devido a suas pequenas massas, eles atingem facilmente grandes velocidades a altas energias. Desta forma, podemos estimar a probabilidade de eletrodesintegração do núcleo, considerando apenas o efeito da interação fotoelétrica do elétron com o núcleo como um todo, uma vez que o efeito da interação de dois corpos – o elétron e a partícula nuclear – é desprezível em relação ao primeiro, até energias do elétron da ordem de 10 MeV, devido à pequena massa do elétron em relação a das partículas nucleares.

Para determinarmos o espectro de fótons virtuais, utilizemos as equações (13) ou (14), nas quais  $b_{min}$  é dado por  $\hbar/\gamma mc$ , caso este valor seja maior que as dimensões nucleares, o que equivale a energias do elétron menores que 100 MeV. Para energias maiores do elétron, devemos tomar  $b_{min} \sim R$  (o raio nuclear), em analogia ao processo de ionização de um átomo, onde tomamos  $b_{min}$  da ordem do raio atômico. Assim,

$$b_{min} = \begin{cases} \frac{\hbar}{\gamma mc}, & \text{se } E \lesssim 100 \text{ MeV} \\ R, & \text{se } E > 100 \text{ MeV} \end{cases} \quad (20)$$

Substituindo  $b_{min} \sim \hbar/\gamma mc$  em (14), segue-se

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( f \frac{\gamma v}{\frac{\hbar\omega}{\gamma mc}} \right)$$

e, como esta situação corresponde a  $\beta \sim 1$ ,

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{f \gamma^2 mc^2}{\hbar\omega} \right) \quad (21)$$

Podemos obter agora uma relação entre a seção de choque de fotodesintegração do núcleo e a seção de choque de eletrodesintegração do mesmo, utilizando o método de W.W., como mostra a equação (5).

Quando discutimos a determinação do espectro dos fótons equivalentes, vimos que, para  $\beta \sim 1$ , o espectro de energia é constituído predominantemente por fótons de baixas energias. É razoável, então, tomarmos como limite superior da energia o valor  $\hbar\omega \simeq \gamma \hbar c / b_{min}$ , que

corresponde a  $\omega b_{min}/(\gamma v) \sim 1$  (veja Fig. 3). Para optarmos pelos limites da equação (20) é conveniente escrevermos

$$b_{min} \simeq \frac{\hbar}{\gamma mc} = \frac{\hbar c}{\gamma mc^2} \simeq \frac{200}{E} \text{ MeV fermi}$$

onde  $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ .

Lembrando que o raio do núcleo, de acordo com o modelo da gota líquida, pode ser dado por  $R \sim r_0 A^{1/3}$ , na qual  $r_0 \sim 1.4$  fermi e  $A$  é a massa atômica do elemento, temos que, para um certo valor da energia tal que  $b_{min} = \hbar c/E > R$ , o limite superior será da ordem de

$$\omega \simeq \frac{\gamma c}{b_{min}} = \frac{\gamma E}{\hbar}$$

e, portanto, a relação procurada é

$$\sigma_{el}(E) \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \int_{\hbar\omega_{limiar}}^{\gamma E} \frac{d\hbar\omega}{\hbar\omega} \sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega) \ln\left(\frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega}\right) \quad (22)$$

onde  $\hbar\omega_{limiar}$  é a energia limiar do processo. Para prosseguirmos, precisamos conhecer a forma de  $\sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega)$ . Esta função foi calculada por Bethe e Peierls [21] para o caso do dêuteron e é igual a

$$\sigma(K) = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha}{\delta^2} \frac{(K-1)^{3/2}}{K^3}$$

onde

$$K \equiv \frac{\hbar\omega}{\epsilon} \quad , \quad \delta^2 \equiv \frac{M\epsilon}{\hbar^2}$$

sendo  $\epsilon$  a energia de ligação do  $H^2$ , e  $M$ , a massa do próton.

Fazendo uma estimativa de  $\delta$ , eles obtiveram

$$\sigma(K) \simeq 1.25 \times 10^{-2} (K-1)^{3/2} K^{-3} \text{ barn}$$

Os valores numéricos estão mostrados na tabela à esquerda da figura abaixo.

Colocando estes resultados num gráfico, obtemos uma curva da seguinte forma:

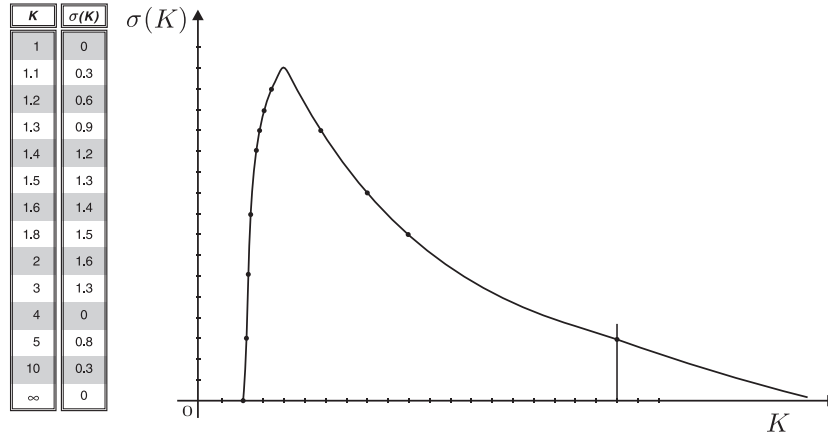


Figura 6

Conhecido  $\sigma(K)$ , podemos obter a seção de choque de eletroprodução dada por (22)

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16\alpha^2}{3} \left(\frac{\epsilon^3}{\delta^2}\right) \int_{\hbar\omega_0}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{(\hbar\omega)^4} \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon} - 1\right)^{3/2} \ln\left(\frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega}\right)$$

ou<sup>24</sup>

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha^2}{\epsilon\delta^2} \int_{\hbar\omega_0}^{\infty} \frac{d\hbar\omega}{(\hbar\omega/\epsilon)^4} \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon} - 1\right)^{3/2} \ln\left(\frac{a}{\hbar\omega/\epsilon}\right)$$

onde  $a \equiv f\gamma^2 mc^2 \epsilon^{-1}$ . Definindo  $K = \epsilon x$  ( $K_0 = \epsilon x_0$ ), chegamos a

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha^2}{\delta^2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4} (x-1)^{3/2} \ln \frac{a}{x}$$

cujos resultados é

$$\sigma_{el} \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha^2}{\delta^2} \frac{\pi}{16} (\ln a - 1.2)$$

Lembre-se que na solução da integral fizemos uma mudança de variáveis que implicou em  $x_0 \rightarrow 1$  e, portanto, ficamos com  $K_0 = \epsilon = \hbar\omega_0$ , donde

$$a \equiv \frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega_0} \quad , \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{\hbar^2}{M\hbar\omega_0}$$

Temos, assim,

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{3} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{M\hbar\omega_0} \left( \ln \frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega_0} - 1.2 \right)$$

Se a energia do elétron for bem maior que a energia limiar  $\hbar\omega_0$ , podemos desprezar o termo 1.2 em relação ao logaritmo, obtendo

$$\sigma_{el} \simeq \frac{\pi}{3} \frac{\alpha e^2}{Mc\omega_0} \ln\left(\frac{f\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega_0}\right)$$

que está de acordo com a equação (22) de [14].<sup>25</sup> Podemos ainda reescrever a equação anterior explicitando a dependência na energia  $E = \gamma mc^2$  como

$$\sigma_{el}(E) \simeq \frac{\pi}{3} \frac{\alpha e^2}{Mc} \frac{1}{\omega_0} \ln\left(\frac{f\gamma E}{\hbar\omega_0}\right), \quad f \sim 1$$

No tratamento clássico da emissão e absorção de luz, podemos ver que existe uma certa largura  $\Gamma$  na linha do espectro emitido por um oscilador, correspondendo a uma intensidade dada por

$$I(\omega)d\omega = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} d\omega$$

<sup>24</sup>Podemos estender o limite da integração para infinito sem incorrer em erro pelo próprio comportamento de  $\sigma_{\gamma\gamma}(K)$ .

<sup>25</sup>Para uma maior compreensão do argumento utilizado por Williams [14] para chegar a esta equação, veja o livro do Jackson, *op. cit.*, seção 17.8, em especial a p. 805.



onde  $\omega_0$  é a frequência do oscilador não-amortecido. Este resultado se mantém na teoria quântica,<sup>26</sup> sendo  $I_0 = \hbar\omega$  e  $\Gamma$  representa agora a probabilidade de transição por unidade de tempo, o que nos permite admitir que  $\sigma_{\gamma\gamma}$  tenha a forma

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\omega) = \frac{Ae^2}{2\pi Mc} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \quad (23)$$

onde  $\Gamma$  é pequeno comparado com  $\omega_0 - \omega_{limiar}$ . Este resultado pode ser levado em (5) e, por simplicidade, é conveniente notarmos que, como  $E \gg \hbar\omega_0$  e  $\Gamma \ll \omega_0 - \omega_{limiar}$ ,  $\sigma_{\gamma\gamma}$  se comporta aproximadamente como<sup>27</sup>

$$\sigma_{\gamma\gamma} = \frac{Ae^2}{Mc} \delta(\omega_0 - \omega)$$

Obtemos, assim, de uma forma direta,

$$\sigma_{el}(E) = \frac{2}{\pi} \alpha \frac{Ae^2}{Mc} \frac{1}{\omega_0} \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right)$$

que está de acordo com a expressão que já obtivemos utilizando o resultado de Bethe e Peierls, desde que  $A \sim 1.6$ .

Vamos agora comparar estes resultados teóricos com o experimental. Em experimentos envolvendo um feixe de elétrons proveniente de um betatron de 22-MeV que incide sobre um sequência de folhas finas e uniformes, Skaggs *et al.*<sup>28</sup> estudaram a reação do tipo  $A^z(e; e', n)(A - 1)^z$ ,<sup>29</sup> e obtiveram a seção de choque de fotoprodução e de eletrodesintegração expressando o resultado como a razão entre elas. Esta razão pode ser obtida usando-se o método de W.W. e a forma ressonante de  $\sigma_{\gamma\gamma}$ .<sup>30</sup> No entanto, já vimos que este método não é válido quando a energia transferida no processo em questão for comparável com a energia do elétron incidente o que, na verdade, ocorre em várias experiências de eletrodesintegração. Por esse motivo, Blair [22] calculou a razão entre as seções de choque de eletrodesintegração. A razão  $R$  entre a seção de choque de fotoprodução e de eletrodesintegração para os isótopos  $Cu^{63}$ ,  $Zn^{64}$ ,  $Ag^{109}$  e  $Ta^{181}$  foi medida por Brown e Wilson [23] para energias do elétron compreendida entre 24-35 MeV. Com este trabalho, eles mostraram que o método de W.W., apesar de suas restrições de aplicabilidade, fornece um valor constante para  $R$  que é da mesma ordem de grandeza do valor que eles mediram no caso do  $Cu$ ,  $Zn$  e  $Ag$ ,<sup>31</sup> enquanto que para o  $Ta$  o resultado difere<sup>32</sup> de um fator 2. Para obtermos o valor de  $R$  predito pelo método de W.W., é conveniente trabalharmos com uma grandeza definida por Brown & Wilson [23], qual seja  $F_{exp}$ , que tem a vantagem de ser independente de uma particular energia de excitação, ao contrário da expressão  $F_{teo}$  de Blaire, a qual é uma grandeza muito difícil de ser medida experimentalmente,<sup>33</sup> definida como

$$F_{exp} = \frac{1}{Z^2} \left( \frac{mc^2}{e^2} \right)^2 \frac{1}{\sigma_{el}} \int d\omega \sigma_{\gamma\gamma}(\omega) \chi(\omega)$$

<sup>26</sup>Veja, por exemplo, Heitler, W.: *The Quantum Theory of Radiation*, third edition, Oxford (1954), parag. 18.

<sup>27</sup>Veja, por exemplo, Butkov. E.: *Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1968), p. 223-4.

<sup>28</sup>*Physical Review* **73**, 420 (1948).

<sup>29</sup>Isto representa uma reação na qual inicialmente temos um elétron incidindo sobre um elemento de número de massa  $A$ , resultando em um estado de um elétron, um nêutron e um elemento  $(A - 1)$ .

<sup>30</sup>Obteremos este resultado a seguir.

<sup>31</sup>A discrepância envolvida é da ordem de 10-15%.

<sup>32</sup>Experimentalmente eles verificaram que  $R$  decresce com a energia do elétron.

<sup>33</sup>Não entraremos em detalhes com relação ao trabalho de Brown & Wilson, limitando-nos apenas a obter o resultado predito pelo método de W.W.

onde  $\chi(\omega)$  é dada por (23) com  $z = 1$ . Logo

$$\begin{aligned} \int d\omega \sigma_{\gamma\gamma}(\omega)\chi(\omega) &= \frac{16}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 \frac{Ae^2}{2\pi Mc} \times \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{\Gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \times \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega} \right) \\ &= \frac{16}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\alpha Z^2 Ae^2}{Mc\omega_0} \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right) \end{aligned}$$

onde  $E = \gamma mc^2 \gg mc^2$ . Substituindo este valor e  $\sigma_{el}$  em  $F_{exp}$ , encontramos

$$F_{exp} = \frac{1}{Z^2} \left( \frac{mc^2}{e^2} \right)^2 \frac{\frac{16}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\alpha Z^2 Ae^2}{Mc\omega_0} \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right)}{\frac{2}{\pi} \frac{\alpha Ae^2}{Mc\omega_0} \ln \left( \frac{g\gamma E}{\hbar\omega_0} \right)} = \frac{8\pi}{3}$$

que é independente da energia total do elétron incidente, bem como da energia de excitação do núcleo.

### 4.3 “Bremstrahlung” não-relativístico

A emissão de radiação em uma colisão entre duas partículas carregadas também pode ser estudada através do método de W.W., considerando-se o espalhamento de radiação equivalente.<sup>34</sup> Se consideramos o processo de *bremstrahlung*, para o qual a partícula perturbadora é o elétron ( $z = 1$ ) e a partícula perturbada, um núcleo atômico de carga  $Ze$ , as condições (i)-(iii) implicam que: a) numa colisão na qual o parâmetro de impacto seja  $b$ , o elétron perturbado esteja numa região de dimensões muito menores que  $b$ ; b) o momento linear do elétron não se aproxima de  $\gamma mv$ .<sup>35</sup> A primeira condição satisfaz a condição de “colisão distante” e a segunda garante que o momento linear transferido seja pequeno em relação ao momento da partícula incidente. A condição (iii) corresponde ao limite  $Ze^2/h\nu \ll 1$ .

Ao utilizarmos o método de W.W., estamos “substituindo” a partícula perturbadora por um pulso de radiação. Sabemos que se uma onda plana monocromática incide sobre uma partícula de carga  $e$  e massa  $m$ , a partícula é acelerada e, então, de acordo com a Eletrodinâmica Clássica, emite uma radiação, o que provoca um recuo da partícula. Este processo como um todo pode ser descrito como o espalhamento da radiação incidente (espalhamento de radiação de Thomson), pois, para  $\beta \ll 1$ , a radiação emitida tem a mesma frequência da radiação equivalente. Como as frequências envolvidas no espectro da radiação equivalente são muito menores que  $mc^2/h$ , podemos usar a fórmula da seção de choque de Thomson, que é válida quando a energia do fóton  $\hbar\omega$  é muito menor do que  $mc^2$ . Com efeito, já vimos que a incerteza na posição da partícula deve ser bem menor que o parâmetro de impacto, *i.e.*,  $\hbar/mv \ll b$ , e o intervalo de tempo mínimo,  $\Delta t$ , para o qual um fóton é emitido pela partícula perturbadora é da ordem de  $\hbar/mc^2 \ll \hbar/mv^2$ , pois estamos tratando o caso em que  $\beta \ll 1$ . Donde concluímos que  $\hbar/mc^2 \ll b/v$  ou ainda que  $vb \ll mc^2/\hbar$ . Por outro lado, vimos que o limite de baixas frequências (Seção 3.2) é definido por  $\omega \ll \gamma v/b_{min} \sim v/b_{min}$ , donde concluímos que, no caso não-relativístico, todas as frequências são muito menores que  $v/b$ . Isto vai explicar porquê podemos utilizar o método de W.W. também no caso não-relativístico. Poderíamos concluir apressadamente que a aproximação feita ao substituir a componente do campo paralela à direção do movimento,  $E_{\parallel}(t)$ , por um pulso

<sup>34</sup>Esta aplicação foi discutida no Congresso Internacional sobre Física Teórica realizado em Kharkov [24].

<sup>35</sup>Tanto as dimensões do volume quanto o momento linear são medidos em um sistema de referência no qual inicialmente a velocidade média do elétron era nula.

de radiação não seria boa quando  $\beta \ll 1$ , pois  $E_{\parallel}(t)$  passaria a variar bem mais lentamente do que quando  $\beta \sim 1$  (Figura A.2). Vimos também na Seção 3.2 que a intensidade do pulso  $P_2$ , correspondente à componente  $E_{\parallel}(t)$ , só é apreciável para frequências em torno de  $\gamma v/b$  e que sua intensidade, em relação a do pulso  $P_1$ , é da ordem de  $\gamma^2$ . Assim, no caso  $\beta \ll 1$  ( $\gamma \sim 1$ ), a intensidade do pulso  $P_2$  só é apreciável para frequências em torno de  $v/b$  e, conseqüentemente, contribuirá muito pouco para o espectro da radiação equivalente, pois já mostramos que, quando  $\beta \ll 1$ , todas as frequências envolvidas são muito menores que  $v/b$ , o que corresponde apenas à região do patamar da Figura 3.

Para determinarmos o número de fótons equivalentes por unidade de energia, utilizamos a expressão (13), com o limite  $b_{min}$  sendo dado pelo princípio de incerteza,  $b_{min} \sim \hbar/mv$ ; logo,

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gm\gamma v^2}{\hbar\omega} \right) \quad (24)$$

que, no caso não-relativístico, se reduz a

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gmv^2}{\hbar\omega} \right)$$

e onde  $v$  é a velocidade relativa entre o elétron e o núcleo.

A seção de choque diferencial  $\chi(\hbar\omega)d\hbar\omega$  para a emissão de um fóton cuja frequência está compreendida no intervalo  $\omega$  e  $\omega + d\omega$  é dada pela equação (22), onde  $\sigma_{\gamma\gamma} \rightarrow \sigma_{Th}$ , que é a seção de choque de Thomson, dada por

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

Logo,

$$\chi(\hbar\omega)d\hbar\omega = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \times \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{\beta^{-2}}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gm\gamma v^2}{\hbar\omega} \right) d\hbar\omega$$

ou

$$\chi(\hbar\omega)d\hbar\omega = \frac{16}{3} \left( \frac{Z^2 e^6}{m^2 v^2 c^3} \right) \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left( \frac{gmv^2}{\hbar\omega} \right) d\hbar\omega$$

Podemos expressar este resultado como

$$E(\hbar\omega) = \chi(\hbar\omega) \times \rho \hbar\omega$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de núcleos, que vamos supor igual à unidade. Assim,  $E(\hbar\omega)$  expressa a energia da radiação espalhada por intervalo unitário de frequência e por unidade de comprimento da trajetória do elétron, numa região onde  $\rho = 1$ , e é dada por:

$$E(\hbar\omega) = \frac{16}{3} \left( \frac{Z^2 e^6}{m^2 v^2 c^3} \right) \ln \left( \frac{gmv^2}{\hbar\omega} \right) \quad (25)$$

Esta expressão está de acordo com outros resultados teóricos<sup>36</sup> no limite  $\hbar\omega \ll mv^2$ . Note que a dependência de  $E(\hbar\omega)$  em  $\omega$  é apenas no argumento do logaritmo de (25). Este termo pode ser

<sup>36</sup>Veja referências citadas em [14].

escrito como  $\ln(b_{max}/b_{min})$ , onde  $b_{max} = v/\omega$ , que é a máxima distância da trajetória em relação ao núcleo para a qual um observador, em repouso em relação ao elétron, observa frequências  $\omega$  no campo coulombiano do núcleo;<sup>37</sup>  $b_{min}$  é o mínimo efetivo para o qual o campo do núcleo é importante.

## 4.4 Colisões Radiativas Relativísticas

### 4.4.1 “Bremstrahlung” relativístico

Como no caso não-relativístico,<sup>38</sup> a emissão de *bremstrahlung* em uma colisão entre uma partícula relativística de carga  $ze$  e massa  $m$  e um núcleo atômico de carga  $Ze$ , também pode ser vista como o espalhamento de fótons virtuais. Vamos considerar este espalhamento em um sistema de referência  $R'$ , no qual o elétron está inicialmente em repouso, porque as fórmulas de espalhamento usualmente se referem a elétrons estacionários. Em  $R'$  a velocidade relativa do núcleo é  $v$  e como  $\gamma \gg 1$ , o espectro de fótons virtuais  $I(\omega')$  é dado por (24), onde  $b_{min} \simeq \hbar/mv$  e que, no limite  $\beta \sim 1$ , se escreve<sup>39</sup>

$$N(\hbar\omega) \simeq \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \frac{1}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega}\right) \quad (26)$$

No caso relativístico, o espectro de Fourier da radiação equivalente compreende uma faixa bem mais extensa do que no caso não-relativístico. Por isso é conveniente considerarmos o espalhamento dos fótons virtuais, representados por (26), em duas partes: frequências  $\omega_a$  menores e maiores que  $mc^2/h$ . Usaremos, em primeira aproximação, a seção de choque de Thomson para baixas energias ( $\hbar\omega_a < mc^2$ ) e a fórmula de Klein-Nishina para fótons com energia  $\hbar\omega_a > \sim mc^2$ , dadas pelas equações a seguir, na qual desprezamos a variação Compton do comprimento de onda, de modo que  $\omega_d = \omega_a$ :

$$\sigma_{th} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \quad (27)$$

e

$$\sigma_{KN} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\pi mc^2}{\hbar\omega} \left[ \ln\left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2}\right) + \frac{1}{2} \right] \quad (28)$$

onde  $q = Ze$ . A equação da seção de choque de Klein-Nishina, obtida da Teoria Quântica, é válida para espalhamento da radiação por elétrons, no limite de altas frequências.

Para frequências pequenas comparadas com  $mc^2/\hbar$ , e para  $\beta \sim 1$ , a seção de choque  $\chi'(\omega_d)$ , no referencial  $R'$ , é

$$\chi'(\omega_d) \simeq \sigma_{th} I(\omega_d) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{z^2 e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{2}{\pi} \alpha Z^2 \ln\left(\frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega_d}\right)$$

<sup>37</sup>Veja Figura 3 para  $\gamma = 1$ .

<sup>38</sup>Em [14], é feito apenas um cálculo aproximado com o objetivo de discutir quais as dependências da fórmula que nos dá a energia total perdida pelo elétron. Esse processo foi discutido em detalhes por von Weizsäcker em [13].

<sup>39</sup>Denotaremos as frequências antes do espalhamento por um índice  $a$  e depois do espalhamento por um índice  $d$ .

Como fazemos as medidas no sistema do laboratório, é conveniente calcularmos a seção de choque em outro sistema de referência  $R$ . A relação entre  $\omega_d$  em  $R'$  e a frequência  $\omega$  em  $R$  é dada por

$$\omega = \gamma\omega_d(1 - \beta \cos \theta_d) \quad (29)$$

onde  $\theta_d$  é o ângulo entre a direção da velocidade  $v$  e a direção de espalhamento em  $R'$ . Como o espalhamento de Thomson é distribuído simetricamente em torno de  $\theta_d = \pi/2$ , e como, para um dado  $\theta_d$ ,  $d\omega/\omega = d\omega_d/\omega_d$ , segue-se que o número de fótons espalhados no sistema  $R$ , com frequência compreendida em um intervalo  $d\omega$ , é dado pela própria equação para o sistema  $R'$ , bastando mudar  $\omega_d$  por  $\omega$ . Portanto,

$$\chi(\omega)d\omega = \frac{16}{3} \left( \frac{z^2 e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 \ln \left( \frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega} \right) \frac{d\omega}{\omega} \quad (30)$$

Este resultado está de acordo com o resultado obtido por Heitler & Sauter [20], que usaram a teoria de Dirac para o elétron e o método de transição entre dois estados estacionários, quando admitimos o espalhamento de Thomson numa região onde  $\hbar\omega \ll \gamma mc^2$ .

Vamos obter agora uma expressão para a energia total perdida pelo elétron. Para isto, vamos dividir o espectro em duas partes: uma na qual  $\hbar\omega_a < mc^2$  e outra na qual  $\hbar\omega_a > mc^2$ .

Multiplicando a equação (30) por  $\hbar\omega$  e integrando até  $\hbar\omega_a \sim mc^2$ , *i.e.*,  $\hbar\omega \sim \gamma mc^2$ , vamos obter a contribuição para a perda total de energia, para o caso de frequências  $\omega_a < mc^2/\hbar$ , ou seja:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{mc^2/\hbar}^{\gamma mc^2/\hbar} \hbar\omega \chi(\omega) d\omega = \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \int \ln \left( \frac{g\gamma^2 mc^2}{\hbar\omega} \right) d\omega \\ &= \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \int \left[ \ln(g\gamma) - \ln \frac{\hbar\omega}{\gamma mc^2} \right] d\omega \\ &= \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \hbar \left[ \frac{\gamma mc^2}{\hbar} [\ln(g\gamma) - \ln 1 + 1] - \frac{mc^2}{\hbar} \left( \ln(g\gamma) - \ln \frac{1}{\gamma} + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

onde usamos que  $\int \ln ax \, dx = x \ln ax - \int x \frac{1}{x} dx = x(\ln ax - 1)$ . Como  $\gamma \gg 1$ , podemos tomar  $\ln(1/\gamma) \sim 1$  e desprezar o segundo termo da equação acima (correspondente ao limite inferior da integral) comparado com o primeiro termo, além de usar o fato que  $\ln(g\gamma) \gg 1$ , pois vimos que  $g \sim 1$ . Logo,  $W_1$  reduz-se a

$$W_1 \simeq \frac{16}{3} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \gamma mc^2 \times \ln(g\gamma)$$

ou ainda

$$W_1 \simeq \frac{16}{3} \frac{\alpha Z^2 e^4 \gamma}{mc^2} \ln(g\gamma) \quad (31)$$

Para frequências  $\omega_a > mc^2/\hbar$ , o espalhamento é predominante para uma direção  $\theta_d \sim$

$(mc^2/\hbar\omega_a)^{1/2}$  e a frequência de espalhamento é, aproximadamente,<sup>40</sup>

$$\omega_d = -\frac{\omega_a}{\left[1 + \frac{\hbar\omega_a}{mc^2}\theta'^2\right]} \approx a\omega_a$$

onde  $a$  não difere muito da unidade. Usando a expressão (29), obtém-se

$$\begin{aligned}\omega &= \gamma a \omega_a (1 - \beta \cos \theta_d) \\ &\simeq \gamma a \omega_a \left[1 - \beta + \frac{1}{2}\beta\theta_d^2 + \mathcal{O}(\theta_d^4)\right] \\ &\simeq \gamma a \omega_a \left(1 - \beta + \frac{1}{2}\frac{\beta mc^2}{\hbar\omega_a}\right) \\ &\simeq \frac{1}{2}\gamma a \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\end{aligned}$$

pois estamos estudando o limite  $\beta \sim 1$ .

Como  $a \sim 1$ , isto significa que, para todo *quantum* de radiação do campo do núcleo de energia  $\hbar\omega_a > mc^2$  espalhado em  $R'$ , um *quantum*  $\hbar\omega \sim \gamma mc^2$  é emitido em  $R$ . Em outras palavras, a cada fóton espalhado pelo elétron, visto do sistema onde ele estava inicialmente em repouso, corresponde um fóton emitido em outro sistema de referência. Este resultado é bastante importante e, deste modo, podemos obter a energia perdida pelo elétron no sistema  $R$ , na região onde  $\hbar\omega_a > mc^2$ , multiplicando (30) pela energia de um fóton emitido em  $R$  e pela seção de choque de Klein-Nishina (28) e integrando sobre todo o espectro de frequência. Na verdade, vamos aproximar a equação (28) por simplificação de cálculo, escrevendo então

$$W_2 = \int_{mc^2/\hbar}^{\gamma mc^2/\hbar} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_a}\right) \ln\left(\frac{\hbar\omega_a}{mc^2}\right) \times \frac{\alpha Z^2}{\omega_a} \ln\left(\frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega_a}\right) \gamma mc^2 d\omega_a$$

ou

$$W_2 = A_2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \alpha Z^2 \gamma mc^2 \int_1^{\sim\gamma} \frac{1}{\zeta^2} \ln \zeta \ln\left(\frac{g\gamma}{\zeta}\right) d\zeta$$

onde  $A_2 \sim 1$  e  $\zeta \equiv \hbar\omega_a/(mc^2)$ .

A solução desta integral é

$$\begin{aligned}W_2 &= \frac{K}{\zeta} \left[ \ln^2 \zeta + (2 - \ln(g\gamma))(\ln \zeta + 1) \right] \Big|_1^\gamma \\ &= K \left\{ \frac{1}{\gamma} [\ln^2 \gamma + (2 - \ln(g\gamma))(\ln \gamma + 1)] - \ln^2 1 - (2 - \ln(g\gamma))(\ln 1 + 1) \right\} \\ &\simeq K \left[ \frac{1}{\gamma} (\ln \gamma + 2) + (\ln(g\gamma) - 2) \right]\end{aligned}$$

ou

$$\boxed{W_2 \simeq K \ln(g\gamma)} \tag{32}$$

<sup>40</sup>Veja, por exemplo, Jackson, *op. cit.* [16], p. 681-2.

pois  $\gamma \gg 1$  e  $g \sim 1$ , onde

$$K = A_2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 \gamma mc^2$$

Analizando (31) e (32), concluímos que  $W_2$  é da mesma ordem de grandeza de  $W_1$  e, conseqüentemente, a contribuição dos fótons virtuais com energia  $\hbar\omega_a > mc^2$  é da mesma ordem de grandeza daquela para fótons  $\hbar\omega_a < mc^2$ , ao contrário do que se obtém da teoria clássica, para a qual na região de frequências  $\hbar\omega_a > mc^2$  a taxa de perda de energia é proporcional a  $\ln^2 \gamma$ .

Podemos ainda escrever a energia total perdida pelo elétron em termos da seção de choque para a perda de toda sua energia como

$$\sigma = \frac{1}{\gamma mc^2} (W_1 + W_2) = A \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \alpha Z^2 \ln(g\gamma) \quad (33)$$

onde  $a \sim 1$  e  $g \sim 1$ . Esta é a mesma fórmula obtida por Heitler & Sauter, tomando-se  $A = 4$  e  $g = 2.1$ .<sup>41</sup>

#### 4.4.2 “Bremstrahlung” de elétrons num cristal

Williams [14] foi o primeiro a mencionar que quando um elétron de energia bem alta atravessa uma rede cristalina pode haver uma contribuição simultânea dos diferentes átomos da rede sobre o *bremstrahlung*, pois as perturbações devidas a diferentes átomos não serão independentes. Na realidade, Williams faz apenas uma estimativa que o levou a concluir que o *bremstrahlung* diminuiria para energias muito altas da partícula incidente sobre o cristal e, de acordo com Feinberg & Pomerančuk [25], este resultado está incorreto.<sup>42</sup> Neste trabalho, ele começa tratando o caso ideal de um cristal infinito (cúbico, por simplicidade) constituído de átomos infinitamente pesados, no qual ele utiliza o método de W.W. e a seguir aborda o caso de um cristal real (onde as dimensões do cristal e a massa dos átomos são finitas). Não entraremos nos detalhes dos cálculos, ressaltando apenas que Ferretti concluiu, utilizando a aproximação de W.W., que a importância do efeito de interferência causada pelo reticulado sobre o *bremstrahlung* aumenta com o aumento da energia da partícula incidente.

#### 4.5 Produção de par por fótons de alta energia no campo de um núcleo atômico

O que será visto nesta Seção corresponde basicamente ao conteúdo das referências [14] e [26]. Inicialmente, vamos ver que o processo de criação de par do tipo  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  não pode ocorrer no vácuo por conservação de energia e momento. O argumento é simples: basta considerarmos a reação no sistema do C.M. do par  $e^+ + e^-$ , no qual  $\vec{p}_{tot} = 0$ , para concluirmos que como para o fóton  $E = pc$ , deveríamos ter um fóton com energia e momento nulos! Como isto não ocorre, para que a reação  $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$  seja possível, é preciso que de algum modo haja um balanço de energia-momento, o que pode ocorrer na presença de um campo coulombiano de um núcleo.

<sup>41</sup>No cálculo de von Weizsäcker o valor obtido para  $a$  é exato.

<sup>42</sup>Um estudo sobre o fenômeno de interferência devido ao *bremstrahlung* em cristais foi desenvolvido por Ferretti, B.: “Sulla ‘Bremstrahlung nei cristalli’”, *Nuovo Cimento* **7**, 118 (1950). Uma discussão mais qualitativa sobre a influência do reticulado cristalino sobre o *bremstrahlung* pode ser encontrada em [25]. Veja mais detalhes em M.L. Ter-Mikaeljan, *Žu. Ėksper. Teor. Fiz.* **25**, 289-296 (1954).

Como resultado da Teoria de Dirac, tanto a criação de pares quanto a aniquilação são fenômenos que envolvem dois fótons. No entanto, verifica-se, experimentalmente, que basta irradiarmos matéria com apenas um feixe de fótons para obtermos tais processos. Desta forma, a produção de par não é resultado da ação de dois fótons reais, conforme Dirac considerou, mas se deve a um fóton e a um núcleo atômico. Entretanto, se utilizamos o método de W.W., os dois processos acima ficam relacionados, pois o campo do núcleo é substituído pela radiação equivalente.

Na região efetiva para produção de pares ( $b > \hbar/mc$ ), a radiação equivalente ao campo do núcleo é dada pela equação (24) para  $\beta \sim 1$ . O número de fótons por intervalo de energia  $d\hbar\omega$  é

$$N(\hbar\omega)d\hbar\omega = \frac{2}{\pi}\alpha Z^2 \ln\left(\frac{g\gamma mc^2}{\hbar\omega}\right) \frac{d\hbar\omega}{\hbar\omega} \quad (34)$$

Queremos obter a seção de choque  $\sigma$  para a produção de par por um fóton de energia  $\gamma mc^2 \gg mc^2$ , em um sistema de referência no qual o núcleo está em repouso. Para tal, usaremos a relação entre produção de par por um fóton e um núcleo e a produção de para por dois fótons. A relação entre as seções de choque para os dois casos é dada por (22), na qual  $\sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega)$  é a seção de choque para a produção de pares por um fóton real e outro virtual se movendo em sentidos opostos.<sup>43</sup> Substituindo a expressão de  $\sigma_{\gamma\gamma}(\hbar\omega)$  pela fórmula de Breit & Wheeler [27], vamos obter

$$\sigma = \frac{28}{9}\alpha Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \ln(g\gamma) \quad (35)$$

A menos do valor numérico de  $g$ , que não pode ser determinado pelo método de W.W., esta fórmula é idêntica à fórmula para produção de par por fótons de grande energia, encontrada por Bethe, Heitler & Sauter [20] e [28], que é

$$\sigma = \frac{Z^2}{137} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{218}{27} \right] \quad (36)$$

Para verificarmos que (35) e (36) possuem a mesma forma, vamos reescrever (36) como

$$\sigma = \alpha Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{mc^2} - \ln \exp \frac{218}{27} \right]$$

na qual o termo entre colchetes é uma expressão do tipo

$$a \ln b - \ln c = \ln\left(\frac{b^a}{c}\right) = \ln\left(\frac{b}{c^{1/a}}\right)^a = a \ln\left(\frac{b}{c^{1/a}}\right)$$

com  $a = 28/9$ ,  $b = 2h\nu/(mc^2)$  e  $c = 3210.15$ . Logo,

$$[\dots] = \frac{28}{9} \ln\left(\frac{2h\nu}{13.4mc^2}\right)$$

e, portanto,

$$\sigma = \alpha Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{28}{9} \ln\left(\frac{0.15h\nu}{mc^2}\right)$$

<sup>43</sup>É conveniente escolhermos o sistema de referência  $R'$ , no qual o núcleo se move com velocidade  $v$  em direção ao fóton. Neste sistema, a energia do fóton se reduz a  $mc^2$ .



e, para fótons para os quais  $h\nu \sim \gamma mc^2$ ,

$$\sigma = \frac{28}{9} \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \ln(g'\gamma)$$

com  $g' \sim 0.2$ , donde (35) e (36) são equivalentes.

Note que (36) e (32) possuem exatamente a mesma forma. Portanto, ao usarmos o método de W.W. fica evidente uma correspondência entre *bremstrahlung* e produção de pares. Esta correspondência vem do fato de que para fótons de energia alta comparada com  $mc^2$ , a seção de choque de espalhamento de Klein-Nishina é da mesma ordem de grandeza da seção de choque para a produção de pares por um fóton de energia  $\hbar\omega \gg mc^2$  e um fóton de energia igual a  $mc^2$  movendo-se em sentidos opostos [14]. Por este motivo é que a expressão integral (22) obtida para o processo de produção de pares é idêntica à obtida para o *bremstrahlung*,<sup>44</sup>

$$\sigma(\gamma) \simeq \alpha Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int_1^{\sim\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \ln \zeta \ln \left( \frac{g\gamma}{\zeta} \right)$$

## 5 Sobre a generalização do Método de W.W.

Em 1955-56, Fowler [29] questionou a validade da aproximação do método de W.W. aplicada ao problema de produção de “estrelas” por mésons  $\mu$ . Ele concluiu que, como neste caso  $q\ell \gg \hbar$  (sendo  $q$  o momento transferido e  $\ell$  a dimensão linear do alvo) a expressão semi-clássica de W.W. não seria válida. A partir daí ele deriva uma outra expressão para o espectro de fótons equivalentes, obtendo que o número de fótons por unidade de energia varia como  $K^{-3/2}$  e não como  $K^{-1}$ . Portanto, ao reexaminar os resultados de George & Evans<sup>45</sup> para produção de “estrelas”, ele mostrou que os efeitos fotonucleares não explicavam as seções de choque medidas. Esta discrepância entre os resultados teórico e experimental levou Fowler a propor a existência de um novo tipo de interação entre os mésons e os núcleons ( $n$ ).

Isto motivou os irmãos Kessler [30] a fazerem uma derivação do método de W.W. utilizando a Teoria Quântica de Campos.<sup>46</sup> A restrição ao tratamento de Fowler, segundo eles, vem do fato de este só ser aplicável no caso de espalhamentos elásticos, nos quais a colisão entre o méson  $\mu$  e um próton do núcleo alvo é elástica e, portanto, não se aplica às interações mais complexas que contribuem para a seção de choque total do processo. Além disso, como a energia transferida no processo de produção de “estrelas” é muito maior que a energia de ligação dos nucleons dentro dos núcleos alvo, estes podem ser considerados livres. Assim, se considerarmos somente espalhamentos elásticos, vemos que *a priori* a idéia de se aplicar o método de W.W. já não é válida, haja vista que não existe um processo de fotoprodução para esta interação, uma vez que fótons reais não são absorvidos por prótons livres, em primeira ordem.

Comparando as seções de choque correspondentes aos gráficos de Feynman (a) e (b) da Figura 7 descrevendo a interação fotoelétrica do méson  $\mu$  com o núcleo em primeira ordem (troca de um fóton) e acrescentando à equação (22) a seção de choque elástica (pelos motivos apresentados acima – veja o gráfico (c)), eles mostraram que o espectro de fótons equivalentes,

<sup>44</sup>Note que a integral converge rapidamente, o que significa dizer que para o processo de produção de pares, bem como para o *bremstrahlung*, só são importantes energias no campo coulombiano do núcleo da ordem de  $mc^2$ .

<sup>45</sup>George, E.P. & Evans, J.: “Observations of Cosmic-Ray Events in Nuclear Emulsions Exposed bellow Ground”, *Proc. Phys. Soc.* **A63**, 1248 (1950).

<sup>46</sup>Outras referências e uma discussão em linhas gerais sobre o assunto podem ser encontradas em [31], onde temos também uma rica lista de referências sobre o método de W.W., suas generalizações e aplicações.

assim obtido, é praticamente o mesmo que o obtido semi-classicamente. O resultado obtido por Kessler & Kessler é válido para qualquer interação eletromagnética de um férmion relativístico.

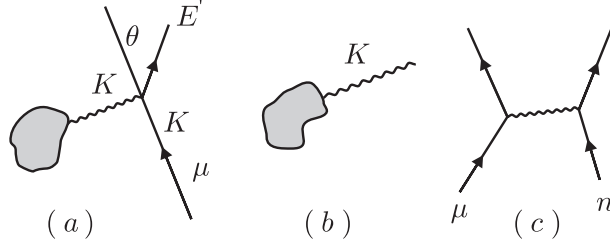


Figura 7

Com este trabalho [30] concluiu-se que a interpretação de George & Evans<sup>47</sup> estava correta e que, portanto, não havia necessidade de se introduzir um novo tipo de interação para explicar a interação  $\mu$ - $n$ .

Outras aplicações do método de W.W. foram feitas a processos que envolvem emissão de nucleons [32-33]. O leitor pode também encontrar outras referências em [31]. Derivações análogas à de Kessler-Kessler foram feitas por Curtis [34] e Dalitz & Yennie [35], que estudaram processos de eletroprodução ao invés de muonprodução. Nestes trabalhos, bem como nos de K.K., estão contidas as origens da generalização do método de W.W.

Inspirado no sucesso obtido pela aproximação semi-clássica de W.W., tanto pelas vantagens de cálculo como pela possibilidade de fornecer uma interpretação satisfatória para as interações do méson  $\mu$  com núcleos, Kessler procurou generalizar o método de W.W. [36], logo após ter mostrado que o espectro de fótons equivalentes obtido via Teoria de Campo concordava com o semi-clássico. A generalização que ele desenvolveu teve seu ponto de partida com a renúncia da condição de que a energia  $E$  do projétil de massa  $m$  fosse muito maior que a energia do fóton virtual trocado na interação com um alvo (uma das condições de aplicabilidade do método semi-clássico de W.W.), mantendo simplesmente a hipótese de que a partícula deva ser relativística, tanto antes quanto depois da interação, *i.e.*,  $E, E' \gg m$ .

Aplicando as regras de Feynman aos diagramas (a) e (b) da Figura 7, Kessler obteve uma equação análoga à equação (22), que lhe permitiu determinar o espectro dos fótons equivalentes, qual seja

$$N(K)dK = \frac{2\alpha}{\pi} \left( \ln \frac{E}{m} \varphi_{max} - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{K}{E} + \frac{K^2}{2E^2} \right) \frac{dK}{K} \quad (37)$$

onde  $\varphi \equiv (2E'/K)\text{sen } \theta/2$ , sendo  $\theta$  o ângulo de difusão da partícula.

Naturalmente, o resultado semi-clássico é reobtido no limite em que  $K \ll E$ . A escolha de  $\varphi_{max}$  depende do processo estudado; no caso das interações de elétrons e mésons  $\mu$  com núcleos, podemos geralmente tomar  $\varphi_{max} \sim 1$  e  $K_{max} \sim E$ .

A principal aproximação feita para a obtenção da equação (37) consiste em não se considerar trocas de fótons “muito virtuais”, o que corresponde a pequenos valores de  $\varphi$ .

Verifica-se que o erro cometido com esta aproximação é pequeno e tanto menor quanto mais relativística for a partícula. Kessler mostrou ainda que se pode atribuir a todo processo virtual elementar, envolvendo um fóton e dois estados de férmions relativísticos (do tipo mostrado na Figura 8),<sup>48</sup> uma probabilidade dada pela equação (37) associada a um processo “quase-real”,

<sup>47</sup>*op. cit.*

<sup>48</sup>Este diagrama pode estar ligado por qualquer uma das três pontas a um gráfico de Feynman completo.

desde que a condição  $E, E' \gg m$  seja satisfeita.

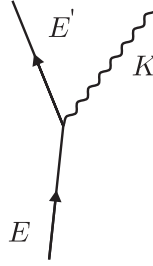


Figura 8

Esse método generalizado foi aplicado aos seguintes casos:

- *bremsstrahlung* de uma partícula em um dado ângulo;
- recuo de núcleo pela criação de par por fótons muito energéticos;
- *bremsstrahlung* interno na desintegração de mésons  $\mu$ , que envolve o estudo de correções radiativas nestas desintegrações.

Há na literatura outros trabalhos que apresentam diferentes versões do método de W.W. na forma covariante<sup>49</sup> que, numa linguagem mais moderna é as vezes chamada de *aproximação de pólo*.

A grande motivação para se continuar a desenvolver a aproximação de W.W. é a considerável dificuldade de natureza matemática que aparece em cálculos de seções de choque em processos de ordem superior em Eletrodinâmica Quântica (QED).

Em 1973, Baier, Fadin e Khoze<sup>50</sup> desenvolveram um método similar ao proposto por Kessler [36], no qual dão atenção a uma outra aproximação: a de *pólo de elétron* (ao contrário da aproximação de *pólo de fóton* segundo a qual a seção de choque de choque é dominada pelo pólo do fóton).

Uma outra derivação da fórmula de W.W. obtida via Teoria de Campos e utilizando um método de helicidade generalizado para cálculos de diagramas de Feynman desenvolvido por Kessler [39] pode se encontrada em [31]; primeiramente para problemas que envolvem trocas de um fóton e depois estendido aos fenômenos de troca de dois fótons (colisões fóton-fóton) – veja também [40].

Uma aplicação interessante do método dos fótons equivalentes para processos de troca de dois fótons é ressaltada por Courau [41], no estudo da produção de léptons em colisões  $\gamma\gamma$ . A maior contribuição para a seção de choque deste processo vem da região física na qual ambos os fótons estão próximos de suas camadas de massa (quase-reais); nesta região, os elétrons são espalhados para ângulos muito pequenos e, neste caso, é possível se utilizar a *aproximação de duplo-fóton equivalente*. Neste trabalho, o autor chama atenção de que do estudo das produções de pares de léptons e de  $\mu^+\mu^-$  principalmente, não se espera ganhar novo conhecimento teórico na QED, mas sim obter alguma intuição para o estudo de processos de produção de quark-antiquark, assim como  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  é o protótipo para a reação  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$ .<sup>51</sup>

Uma outra aplicação da aproximação de duplo fóton equivalente de W.W. foi feita por Barcelos Neto & Chanda [45] ao estudarem o efeito das massas de quarks pesados em interações  $\gamma\gamma$ , utilizando a generalização do método de W.W. apresentada em [44], [45] e [46].

<sup>49</sup>Veja, por exemplo, [31], [37], [38] e outras referências lá citadas.

<sup>50</sup>Baier, V.N. *et al.*: “Quasi-Real Electron Method in High Energy Quantum Electrodynamics”, *Nuclear Physics B* **65**, 381 (1973).

<sup>51</sup>Sobre a validade da aproximação de fóton equivalente para colisões fóton-fóton veja [42].

Em [44] encontramos uma derivação do método de W.W. usando a técnica de teoria de perturbação ordenada no tempo no referencial de momento infinito desenvolvido por Bjorken *et al.* [45] e Brodsky *et al.* [46]. As aplicações do método, em [44], são referentes à aniquilação  $e^+e^-$  e espalhamento inelástico fóton-nucleon e elétron-nucleon a altas energias, para as quais os autores obtêm estimativas de seções de choque em ordens mais altas de QED.

A última aplicação que mencionaremos aparece no artigo de Altarelli & Parisi [47], no qual eles aplicam a generalização do método de W.W. [36], [43] e [44] na Cromodinâmica Quântica (QCD). Esperamos poder, em um futuro próximo, continuar o estudo do método de W.W. dando ênfase a outras possíveis aplicações de suas generalizações à QCD. Para mais detalhes consulte [48].

## 6 Comentários finais

Podemos dizer que o método de W.W. teve sua origem no estudo da interação de partículas carregadas com a matéria, tendo por base a sugestão de N. Bohr de que deveria haver uma grande analogia entre a teoria do decréscimo de velocidade de partículas carregadas ao passarem pela matéria e a teoria eletromagnética da dispersão, além da proposição de Fermi de que a perturbação de um átomo em colisões distantes pode ser obtida corretamente decompondo-se esta em suas componentes de Fourier e supondo que cada componente se comporta como radiação de frequência igual à da componente de Fourier. Isto vai sugerir uma relação entre os efeitos produzidos por uma partícula carregada, que incide sobre um alvo, e os efeitos de um campo perturbativo de radiação, que constitui a idéia básica do método de W.W. Esta relação se justifica pelo fato de que a Mecânica Quântica não faz nenhuma distinção, *a priori*, entre o efeito de um campo de uma partícula carregada e aquele de um campo de radiação. Sendo  $e$  e  $m$  a energia e a massa da partícula incidente,  $E'$ , sua energia final e  $K = E - E'$ , a energia do fóton trocado na interação, podemos dizer que a condição de aplicabilidade do método é que tenhamos para o processo dado  $E \gg m$  e  $E \gg K$ .

Com o grande interesse que surgiu na década de 1950 sobre a *física dos mésons*, em particular a interação do méson- $\mu$ , de natureza cósmica, com a matéria, alguns físicos tentaram estender o limite de aplicabilidade da aproximação semi-clássica de W.W. para entender a interação méson-matéria. Esta aplicação, em particular, motivou outros físicos a buscarem uma derivação mais formal do método via Teoria de Campos, do que resultaram várias generalizações desta aproximação, que encontraram na QED um vasto campo de aplicação. A grande motivação para se continuar aprimorando a aproximação de W.W. é a considerável dificuldade de natureza matemática que aparece nos cálculos de seções de choque em processos de ordem superior em QED.

Atualmente já existem alguns trabalhos que aplicam as generalizações do método de W.W. à QCD e acreditamos que esta aproximação possa vir a ser igualmente útil à compreensão de processos fundamentais da QCD.

## Referências

- [ 1] Bohr, N.: “On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter”, *Philosophical Magazine* **25** (1913) 10.
- [ 2] Bohr, N.: “On the theory of the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter”, *Philosophical Magazine* **30** (1915) 581.
- [ 3] Fermi, E.: “On the Theory of Collisions Between Atoms and Elastically Charged Particles”, *Zeitschrift für Physik* **29** (1924) 315.
- [ 4] Gaunt, J.A.: “The Stopping Power of Hydrogen Atoms for  $\alpha$ -particles according the New Quantum Theory”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **23** (1927) 732.
- [ 5] Williams, E.J.: “The straggling of  $\beta$ -particles”, *Proceedings of the Royal Society A* **125** (1929) 420.
- [ 6] Williams, E.J. & Terroux, F.R.: “Investigation of the Passage of “fast”  $\beta$ -particles through Gases”, *Proceedings of the Royal Society A* **126** (1930) 289.
- [ 7] Williams, E.J.: “The loss of energy by  $\beta$ -particles and its distribution between different kinds of collisions”, *Proceedings of the Royal Society A* **130** (1931) 328.
- [ 8] Dirac, P.A.M.: “On the Theory of Quantum Mechanics”, *Proceedings of the Royal Society A* **112** (1926) 661-677. Veja também *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, quarta edição (1958).
- [ 9] Williams, E.J.: “The passage of  $\alpha$ - and  $\beta$ -particles through Matter and Born’s theory of Collisions”, *Proceedings of the Royal Society A* **135** (1932) 108.
- [10] Bethe, H.: “Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch. Materie”, *Annalen der Physik* **5** (1930) 325.
- [11] Williams, E.J.: “Applications of the Method of Impact Parameter in Collisions”, *Proceedings of the Royal Society A* **139** (1933) 163.
- [12] Williams, E.J.: “Nature of the High Energy Particles of Penetrating Radiation and Status of Ionization and Radiation Formulae”, *Physical Review* **45**, 729 (1934).
- [13] Weizsäcker, C.F. v.: “Radiation emitted in collisions with very fast electrons”, *Z. Phys.* **88**, 612 (1934).
- [14] Williams, E.J.: “Correlation of Certain Collision Problems with Radiation Theory”, *Mat.-Fys. Meddel.* **13**, 4 (1935).
- [15] Williams, E.J.: “Applications of Ordinary Space-Time Concepts in Collision Problems and Relation of Classical Theory to Born’s Approximation”, *Review of Modern Physics* **17**, p. 217 (1945).
- [16] Jackson, J.D.: *Classical Electrodynamics*, second edition, John-Wiley (1975), Section 15.4.
- [17] Bohr, N.: “Penetration of Atomic Particles through Matter”, *Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd.* **XVIII**, n. 8 (1948).
- [18] Mott, N.F.: “On the teory of Excitation by Collison with Heavy Particles”, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **27**, 553 (1931).

- [19] Frame, J.W.: “On the Mathematical Equivalence of two ways of regarding the Excitation of an Atom by a Fast Moving  $\alpha$ -Particle”, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **27**, 511 (1931).
- [20] Heitler, W. & Sauter, F.: “Stopping of Fast Particles with Emission of radiation and the Birth of Positive Electrons”, *Nature* **132**, 892 (1933).
- [21] Bethe, H. & Peierls, R.: “Quantum Theory of Diplon”, *Proc. Roy. Soc.* **148**, 146 (1935).
- [22] Blair, J.S.: “Electro-Disintegration of Nuclei”, *Phys. Rev.* **75**, 907 (1949).
- [23] Brown, K.L. & Wilson, R.: “Electrodisintegration of  $\text{Cu}^{63}$ ,  $\text{Zn}^{64}$ ”,  $\text{Ag}^{109}$ ,  $\text{Ta}^{181}$ ”, *Phys. Rev.* **93**, 443 (1954).
- [24] International Congress on Theoretical Physics at Karkov, *Nature* **134**, 109 (1934).
- [25] Feinberg, E.L. & Pomerančuk, I.: “High Energy Inelastic Diffraction Phenomena”, *Suppl. Nuovo Cimento* **3**, 652 (1956).
- [26] Williams, E.J.: “Production of Electron-Positron Pairs”, *Nature* **135**, 66 (1935).
- [27] Breit, G. & Wheeler, J.A.: “Collision of Two Light Quanta”, *Physical Review* **45**, 766 (1934).
- [28] Bethe, H. & Heitler, W.: “On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons”, *Proc. Roy. Soc.* **146**, 83 (1934).
- [29] Fowler, G.N.: “On Star Production by  $\mu$ -Mesons underground”, *Proc. Phys. Soc.* **A68**, 482 (1955); “On the anomalous scattering of  $\mu$ -mesons”, *Nuclear Physics* **1**, 119 (1956).
- [30] Kessler, D. & Kessler, P.: “On the validity of the Williams-Weizsäcker Method and the problem of the nuclear interaction of relativistic  $\mu$ -mesons”, *Nuovo Cimento* **4**, 601 (1956).
- [31] Kessler, P.: “The equivalent photon approximation in one- and two- photon exchange process”, *Talk given at Int. Coll. on Photon-Photon Coll. in Electron-Positron Ftor. Rings*, Collège de France, (1973).
- [32] Annis, M.; Wilkins, C. & Miller, J.D.: “Nuclear Interaction of Fast  $\mu$ -Mesons”, *Physical Review* **94**, 1038 (1951).
- [33] de Pagter, J. & Sard, R.D.: “Interaction of Fast  $\mu$ -meson in head with small-energy transfer”, *Physical Review* **118**, 1353 (1951).
- [34] Curtis, R.B.: “Meson Production by Electrons”, *Physical Review* **104**, 211 (1956).
- [35] Dalitz, R.H. & Yennie, D.R.: “Pion Production in  $e^-p$  Collisions”, *Physical Review* **105**, 1598 (1957).
- [36] Kessler, P.: “Sur une méthode simplifiée de calcul pour le processus relativistes en électrodynamique quantique”, *Nuovo Cimento* **17**, 809 (1960).
- [37] Gorgé, V. *et al.*: “One-Photon Exchange Processes and Radiative Corrections”, *Nuovo Cimento* **27**, 928 (1963).
- [38] Gorgé, V.: “The Photon-Pole Approximation in Pair Production Processes”, *Nuovo Cimento* **35**, 545 (1965).

- [39] Kessler, P.: “Une Nouvelle Méthode de Calcul des Diagrammes de Feynman”, *Cahiers de Physique* **20**, 55 (1966); “A Generalized Helicity Method for Feynman Diagram Calculations”, *Nuclear Physics* **B15**, 253 (1970).
- [40] Terazawa, H.: “Two-Photon Processes for Particle Production at High Energies”, *Rev. Mod. Phys.* **45**, 615 (1973).
- [41] Courau, A.: “Production of Lepton pairs in  $\gamma\gamma$  collisions”, LAL 81/14 (maio 1981), Invited talk at the 4th Int. Colloq. Photn-Photon Interactions, Paris, France, Apr. 6-9 (1981); “Experimental hadronic results on  $\gamma\gamma$  processes”, LAL 82/01 (janeiro 1982), presented at  $\gamma\gamma$  Seminar, Orsay, France, Oct. 7-8 (1981).
- [42] Carimalo, C., Kessler, P. & Parisi, J.: “Validity of the equivalent-photon approximation for virtual photon-photon collisions”, *Physical Review* **D20**, 1057 (1979); “Interpretation of single-tagged events in  $\gamma\gamma$  experiments”, *Physical Review* **D21**, 669 (1980).
- [43] Barcelos Neto, J. & Chanda, R.: “Effect of heavy-quark masses in photon-photon interactions”, *Physical Review* **D24**, 647 (1981).
- [44] Chen, M.-S. & Zerwas, P.: “Equivalent-particle approximations in electron and photon processes of higher-order QED”, *Physical Review* **D12**, 187 (1975).
- [45] Bjorken, J.D., Kout, J.B. & Soper, D.E.: “Quantum Electrodynamics at Infinite Momentum: Scattering from an external Field”, *Physical Review* **D3**, 1382 (1971).
- [46] Brodsky, S.J., Roskies, R. & Suaya, R.: “Quantum Electrodynamics and renormalization Theory in the Infinite Momentum Frame”, *Physical Review* **D8**, 4574 (1973).
- [47] Altarelli, G & Parisi, G.: “Asymptotic freedom in parton language”, *Nuclear Physics* **B126**, 298 (1977).
- [48] Caruso, F.: “Sobre o Método de Weizsäcker-Williams e suas Primeiras Aplicações”, *Monografia do CBPF*, MO-001/09 (2009).